מינוח

אם $x\in M$, סביבה של x פירושו קבוצה פתוחה שכוללת את הנקודה.

טענה

יהיו M,N מרחבים מטריים, $f:M\to N$, $a\in M$.

אזי f רציפה בa אם"ם לכל סביבה U של $f\left(a\right)$ קיימת סביבה V של a כך ש$f\left(v\right)\subseteq U$.

משמעות

ניתן להגדיר את הרציפות באמצעות הקבוצות הפתוחות, ללא צורך במטריקה.

אמנם הקבוצות הפתוחות מוגדרות ע"י המטריקה, אבל הן מושג חלש יותר, שכן לא ניתן להגדיר מטריקה לפי קבוצות פתוחות.

לכן, גם אם יש לנו רק את המידע החלקי של הקבוצות הפתוחות ואין לנו מטריקה, אפשר להגדיר רציפות.

זה יתן לנו את האפשרות להיפטר מהמטריקה ולהישאר רק אם הקבוצות הפתוחות.

הוכחת הטענה

$\Leftarrow$ נניח f רציפה בa, ותהי U סביבה של $f\left(a\right)$.
U פתוחה, $f\left(a\right)\in U$, לכן יש $\epsilon>0$ כך ש$B\left(f\left(a\right),\epsilon\right)\subseteq U$.
f רציפה בA, לכן יש $\delta>0$ כך ש$f\left(B\left(a,\delta\right)\right)\subseteq B\left(f\left(a\right),\epsilon\right)\subseteq U$.
ניקח $U=B\left(a,\delta\right)$.

$\Rightarrow$ נניח שמתקיים התנאי על סביבות, ויהי $\epsilon>0$. $B\left(f\left(a\right),\epsilon\right)$ היא סביבה של$f\left(a\right)$, לכן יש סביבה V של a כך ש$f\left(v\right)\subseteq B\left(f\left(a\right),\epsilon\right)$.
V פתוחה, $a\in V$, לכן יש $\delta>0$ כך ש$B\left(a,\delta\right)\subseteq V$, ונקבל

$$f\left(B\left(a,\delta\right)\right)\subseteq B\left(f\left(a\right),\epsilon\right)$$

טענה

יהיו M,N מרחבים מטריים, $f:M\to N$.

אזי f רציפה אם"ם לכל $u\subseteq N$ פתוחה בN מתקיים ש$f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה בM.

תזכורת: אם $f:A\to B$ ו$C\subseteq B$, אזי $f^{-1}\left(C\right):=\left\{ a\in A|f\left(a\right)\in C\right\}$

במילים - f רציפה אם"ם תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה.

הוכחה

נניח f רציפה ותהי $U\subseteq N$ פתוחה. צ"ל $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה.

תהי $a\in f^{-1}\left(U\right)$. f רציפה בa, לכן לפי הטענה הקודמת יש סביבה V_{a} של a כך ש$f\left(V_{a}\right)\subseteq U$. מכאן[1] ש$V_{a}\subseteq f^{-1}\left(u\right)$.

[1]אם $f:A\to B$, $C\subseteq A$, $D\subseteq B$ אזי $f\left(C\right)\subseteq D$ אם"ם $C\subseteq f^{-1}\left(D\right)$

מכאן נובע ש$f^{-1}(U) = V_a \bigcup_{a\in f^{-1}(U)}$ (הלמה השימושית, שנוכיח עוד מעט).
כלומר, הצגנו את $f^{-1}(U)$ כאיחוד של קבוצות פתוחות. לכן היא קבוצה פתוחה.

הלמה השימושית(ל"ש)תכף

תהי A קבוצה, ונניח לכל $x \in A$ נתון $x \in E_x \subseteq A$. אזי

$$\bigcup_{x\in A} E_x = A$$

הוכחה

$\supseteq$ לכל $x \in A$, $x \in E_x$ לפי ההגדרה, ולכן $x \in \bigcup_{x\in A} E_x$.

$\subseteq$ נניח תמונה הפוכה של קבוצה פתוחה היא קבוצה פתוחה, ולכל $a \in M$ נראה שf רציפה בa..
תהא נתונה a, ותהא נתונה סביבה U של $f(a)$. ניקח $V = f^{-1}(U)$. היא פתוחה, וגם $a \in V$, ומתקיים $f(V) \subseteq U$.

הגדרה

שתי מטריקות d, ρ על אותה קבוצה M נקראות <u>שקולות</u> אם קבוצה $U \subseteq M$ היא פתוחה לפי d $\Leftrightarrow$ היא פתוחה לפי ρ.

דוגמאות למטריקות שקולות

(M, d) מרחב מטרי כלשהו. $(M, 5d)$ - המטריקות שקולות.

טענה

על $\mathbb{R}^n$ המטריקות d^2(המטריקה האוקלידית) וd^∞(מטריקת המקסימום) שקולות.

טענת עזר

עבור $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

$$B^2(a,r) \subseteq B^\infty(a,r) \qquad B^\infty(a,r) \subseteq B^2\left(a, \sqrt{n}r\right)$$

הוכחת טענת העזר

$$x=(x_1,...x_n) \qquad a=(a_1,...a_n)$$

- הכלה ראשונה

נניח $x\in B^2(a,r) \Leftarrow \sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i)^2<r^2 \Leftarrow (x_i-a_i)^2<r^2$ לכל i. כלומר $|x_i-a_i|<r$ לכל i. לכן $\max_{1\le i\le n}|x_i-a_i|<r \Leftarrow x\in B^\infty(a,r)$

- הכלה שנייה

נניח $x\in B^\infty(a,r) \Leftarrow |x_i-a_i|<r$ לכל $i \Leftarrow |x_i-a_i|^2<r^2$ לכל $i \Leftarrow$ $\sum_{i=1}^{n}|x_i-a_i|^2<nr^2 \Leftarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-a_i|^2}<\sqrt{n}r \Leftarrow x\in B(a,\sqrt{n}r)$

הוכחת הטענה שהמטריקה האוקלידית ומטריקת MAX שקולות

$\Leftarrow$ תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה לפי המטריקה האוקלידית. נראה שהיא גם פתוחה לפי מטריקת MAX.
תהי $a\in U$. כיוון שהיא פתוחה לפי המטריקה האוקלידית. יש $r>0$ כך ש$B^2(a,r)\subseteq U$. אזי

$$B^\infty\left(a,\frac{r}{\sqrt{n}}\right)\subseteq B^2(a,r)\subseteq U$$

$\Rightarrow$ תרגיל

דוגמה למטריקות לא שקולות

המטריקה הדיסקרטית אינה שקולה למטריקה האוקלידית.
מיהן הקבוצות הפתוחות למטריקה הדיסקרטית על קבוצה X? כל הקבוצות! כי כל נקודון הוא כדור פתוח ברדיוס 1 סביב אותה נקודה.
לעומת זאת במטריקה האוקלידית, לכן $r>0$, $B^2(a,r)\not\subseteq\{a\}$.

קבוצות פתוחות של תת מרחב

האם ידיעת הקבוצות הפתוחות של מרחב נותנת לנו גם את תתי הקבוצות הפתוחות של תת מרחב?
התשובה היא כן

טענה

יהי M מרחב מטרי, $A\subseteq M$ תת מרחב.
אזי $A\subseteq U$ קבוצה פתוחה בA אס"ם יש $W\subseteq M$ קבוצה פתוחה בM כך ש$U=W\cap A$.

טענת עזר

עבור $a\in A$,

$$B^{A}\left(a,r\right)=\left\{ x\in A|d\left(x,a\right)<r\right\}$$

$$B^{M}\left(a,r\right)=\left\{ x\in M|d\left(x,a\right)<r\right\}$$

$$B^{A}=B^{M}\cap A$$

הוכחת הטענה הראשית

$\Leftarrow$ נניח W פתוחה בM. נראה ש$U=W\cap A$ פתוחה בA.
יהי $a\in U$. $a\in W$. לכן יש $r>0$ כך ש$B^{M}\left(a,r\right)\subseteq W\Leftarrow$ $B^{A}\left(a,r\right)=B^{n}\left(a,r\right)\cap A\subseteq W\cap A=U$.

$\Rightarrow$ נניח $A\subseteq U$ פתוחה בA. נבנה $W\subseteq M$ פתוחה בM כך ש$U=W\cap A$.
לכל $x\in U$ יש $r_{x}>0$ כך ש$B^{A}\left(x,r_{x}\right)\leq U$. נקבל $\bigcup\limits_{x\in U}B^{A}\left(x,r_{x}\right)=U$(ל"ש).
נגדיר $W=\bigcup\limits_{x\in U}B^{M}\left(x,r_{x}\right)$ - היא פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות. אזי

$$W\cap A=\left(\bigcup_{x\in U}B^{M}\left(x,r_{x}\right)\right)\cap A=\bigcup_{x\in U}\left(B^{M}\left(x,r_{x}\right)\cap A\right)=\bigcup_{x\in U}\left(B^{M}\left(x,r_{x}\right)\cap A\right)=\bigcup_{x\in U}B^{A}\left(x,r_{x}\right)=U$$

הערות

- אם $A\subseteq U$ וU פתוחה בM אז ודאי U פתוחה בA, כי $U=U\cap A$
- אם A פתוחה, ו$A\subseteq U$ פתוחה בA, אז U גם פתוחה בM, כי $U=A\cap W$

הגדרה

יהי M מרחב מטרי. $S\subseteq M$ נקראת סגורה אם S^{c} פתוחה.

תכונות

מהתכונות של קבוצות פתוחות ומכללי דה־מורגן נקבל:

1. $\emptyset, M$ סגורות.
2. אם $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות סגורות אז גם $\bigcap\limits_{\alpha\in I} S_\alpha$ סגורה.
3. אם $S_1, ...S_n$ אוסף <u>סופי</u> של קבוצות סגורות אז גם $S_1 \cup ... \cup S_n$ סגורה.

משפט

יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$ תת קבוצה.
אזי A סגורה בM אם"ם היא מקיימת את התכונה הבאה:
לכל סדרת נקודות $\{x_n\}$ בA, אם הסדרה מתכנסת בM אז הגבול שייך לA(אם יש $p \in M$ כך ש$x_n \to p$ אז $p \in A$)

הוכחה

$\Leftarrow$ נניח A סגורה, ונניח $\{x_n\}$ סדרת נקודות בA כך ש$x_n \to p$($p \in M$ כלשהו).
נראה ש$p \in A$.

נניח שלא: $p \in A^c$, A^c פתוחה. לכן יש $r > 0$ כך ש$B(p,r) \subseteq A^c$. אבל $x_n \to p$, לכן יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in B(p,r) \subseteq A^c$.
מצד שני, $x_n \in A$.
<u>סתירה</u>.

$\Rightarrow$ נניח שA לא סגורה, ונראה שלא מתקיים התנאי על סדרות. כלומר נראה שיש לפחות סדרה אחת של נקודות בA שמתכנסת לנקודה מחוץ לA.

A לא סגורה, לכן A^c לא פתוחה, לכן יש נקודה $p \in A^c$ שעבורה לכל $\epsilon > 0$, $B(p,\epsilon) \not\subseteq A^c$. לכל n עבור $\epsilon = \frac{1}{n}$ ניקח נקודה $x_n \in B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ שאיננה בA^c, כלומר $x \in A$.

קיבלנו סדרה $\{x_n\}$ של נקודות בA. $d(x_n,p) < \frac{1}{n}$ לכן $x_n \to p$, אולם $p \notin A$.

תרגיל

יהי M מרחב מטרי. $\{x_i\}$ סדרת נקודות בM, $p \in M$.
אזי $x_n \to p$ אם"ם לכל סביבה U של p יש n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $x_n \in U$.

נקודות הצטברות

הגדרה

יהי M מרחב מטרי, $A \subseteq M$, $p \in M$.
p נקראת נקודת הצטברות של A אם לכל $r > 0$ יש $x \in A$ כך ש־$0 < d(x,p) < r$.

ניסוחים שקולים

1. לכל $r > 0$ יש $p \neq x \in A$ כך ש־$d(x,p) < r$
2. לכל סביבה U של p יש $p \neq x \in A$ כך ש־$x \in U$
3. לכל סביבה U של p, $U \cap (A - \{p\}) \neq \emptyset$
4. לכל סביבה U של p, $(U - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$

טענה

אם p נקודת הצטברות של A, אז קיימת סדרת נקודות ב־A $\{x_n\}$ שכולן שונות מ־p וכולן שונות זו מזו כך ש־$x_n \to p$.

הוכחה

- יש $x_1 \in A$ כך ש־$x_1 \neq p$, $d(x_1,p) < 1$.
- יש $p \neq x_2 \ni A$ כך ש $d(x_2,p) < \min\left(\frac{1}{2}, d(x_1,p)\right)$.
- באופן רקורסיבי נבחר $A \in x_n \neq p$ כך ש $d(x_n,p) < \min\left(\frac{1}{n}, d(x_{n-1},p)\right)$

נקבל סדרה x_n כנדרש.

מסקנה

אם p נקודת הצטברות של A, אז לכל $r > 0$ יש **אינסוף** נקודות $x \in A$ כך ש־$0 < d(x,p) < r$.