

דף תרגילים 7

1. נתון המשטח $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$

א. מצאו פרמטריזציה $X(\theta, \phi)$ של M .

ב. נתונה עקומה $\beta(t) = X(\theta(t), \phi(t))$ על המשטח M כך שהווקטור $\beta''(t)$ תלוי

לינארית ב- $\beta(t)$. מצאו משוואה דפרנציאלית שעל $(\theta(t), \phi(t))$ לקיים.

2. נתונים המשטחים הבאים בעזרת פרמטריזציה. מצאו את התבנית היסודית הראשונה, את העתקת ויינגרטון, את התבנית היסודית השניה ואת המשוואות הגיאודזיות שלהם. כמו כן חשבו גם את עקמומיות גאוס בכל נקודה.

א. אליפסואיד,

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} a \cos u \cos v \\ a \cos u \sin v \\ c \sin u \end{pmatrix}, \quad a, c > 0$$

ב. חרוט,

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ ku \end{pmatrix}, \quad k > 0$$

ג. טורוס,

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} (2 + \cos u) \cos v \\ (2 + \cos u) \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

ד. הליקואיד,

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ kv \end{pmatrix}, \quad k > 0$$

3. תהי $\beta(t) = X \circ \alpha(t)$ עקומה על משטח עם פרמטריזציה $X(u, v)$. נניח כי לכל t הוקטור

$\beta(t)$ פרופרציוני ל $X_1 \times X_2$. מצאו משוואות דיפרנציאליות אשר α^1, α^2 חייבים לקיים.

4. מצאו את הקווים הגיאודזים של משטח בעל המטריקה $G(u, v) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. שימו לב שיש

למצוא את הקווים עצמם, ולא רק את המשוואות. רמז: כדאי להשתמש בכך שהתנועה על הקווים היא במהירות קבועה, כלומר במשוואה $\|\beta'\|^2 = c$.