30/10/17

אקסיומות ההסתברות:

אם אנחנו "מבצעים ניסוי" (למשל מטילים קוביה הוגנת) הרבה פעמים, אז ההסתברות שתצא תוצאה כלשהי היא התדירות שלה: מספר הפעמים שיצאה התוצאה לחלק למספר הניסויים שביצענו = ההסתברות של התוצאה.
למשל בדוגמא של הקוביה: אם נטיל את הקוביה הרבה פעמים, $\frac{1}{6}$ מהפעמים נקבל את התוצאה 2. ולכן ההסתברות של 2 היא $\frac{1}{6}$.
בקורס מתחילים במקום אחר. מגדירים את ההסתברות בעזרת 3 אקסיומות. ("ההסתברות היא משהו שמקיים את האקסיומות") ולבסוף נוכיח את ההגדרה הקודמת כמשפט: חוק המספרים הגדולים.

המסגרת הכללית:
אנו מבצעים ניסוי כלשהו (הטלת 3 מטבעות, בחירת פתק מהכובע)
לניסוי יש מס' תוצאות אפשריות שאנו יודעים מראש מהן כל התוצאות
(הטלת מטבע - עץ או פלי). אוסף כל התוצאות האפשריות נקרא **מרחב המדגם** - Ω.
(בהטלת מטבע ← {פלי, עץ} = Ω).
לתת קבוצה של Ω קוראים **מאורע** (בהטלת מטבע: {פלי}, {עץ}, ϕ, Ω הם כל המאורעות. בהטלת קוביה: $\{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$, כל תוצאה בעצם היא מאורע.
$\{4,5,6\} = \{$יצא זוגי גדול מ-3$\} = A$, $\{2,4,6\} = \{$יצא זוגי$\} = B$.
אם מבצעים ניסוי ומתקבלת תוצאה שנמצאת בתוך המאורע A, אומרים ש-A התרחש.
תוצאה היא איבר של אומגה, מאורע הוא תת-קבוצה של Ω.

דוגמא מסכמת:
תוצאה 1 תוצאה 2 סטודנט
מטילים שתי קוביות ובוחרים סטודנט מהכיתה. תוצאה כלשהי של הניסוי היא: (4,3,ולרי).
מרחב המדגם: $\{1,2,3,4,5,6\} X \{1,2,3,4,5,6\} X \{$שמות הסטודנטים$\} = \Omega$.
מאורע כלשהו הוא אוסף של שלשות מהצורה: (x,y,שם) שם של סטודנט
למשל {הקוביות יצאו סכום 6, והסטודנט בעל שם שמתחיל ב-ע} = A ⇐ (1,5,עידן), (2,4,עמית), (3,3,עומר) וכו'.
תזכורת: מאורע הוא קבוצה ולכן לסדר הופעת האיברים במאורע אין משמעות.
* מעתה והלאה נעבוד רק עם תת קבוצות, כלומר מאורעות. בהמשך נחשב הסתברויות של מאורעות בלבד. למרות שלניסוי יש תוצאות אנו מחשבים הסתברויות של מאורעות.

תזכורת לפעולות על קבוצות: בהינתן שלושה מאורעות E,F,G אז:
- קומוטטיביות: $E\cap F = F\cap E$; $E\cup F = F\cup E$.
- דיסטריבוטיביות: $(E\cup F)\cap G = (E\cap G)\cup(F\cap G)$; $(E\cap F)\cup G = (E\cup G)\cap(F\cup G)$.
- משלים: כל התוצאות שאינן ב-F: $F^c = \Omega - F$.
- חוקי דה מורגן: $(C\cup F)^c = C^c\cap F^c$; $(C\cap F)^c = C^c\cup F^c$.

Scanned by CamScanner

אקסיומות קולמוגורוב:

אלו 3 תכונות אשר מגדירים פונקציה P להיות **מידת הסתברות**.

תהי $P: P(\Omega) \to \mathbb{R}$, פונקציה של מאורעות (למשל בהטלת קובייה: $P(\{\text{יצא זוגי}\}) = \frac{1}{2}$).
(כל תתי הקבוצות של Ω - כל המאורעות). P תיקרא **מידת הסתברות** אם מתקיים:

1. לכל מאורע A: $0 \le P(A) \le 1$.
2. $P(\Omega) = 1$ ← כל התוצאות האפשריות של הניסוי הן ב-Ω ולכן אם ביצענו ניסוי, בטוח ש-Ω קרה.
3. σ - אדיטיביות: בהינתן סדרה של מאורעות **זרים בזוגות** $A_1, A_2, A_3, \dots$
(אין שום תוצאה משותפת בין המאורעות ← $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \ne j$).
אז ← $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. הערה: הסדרה יכולה להיות סופית $A_1, \dots, A_n$, ואז התוצאה היא $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

הסבר לאקסיומה 3: $P(A_1 \text{ או } A_2 \text{ או } A_3 \text{ או} \dots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots$.

דוגמא:

נניח שהניסוי שאני מבצעת הוא הטלת קובייה הוגנת. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \dots = P(\{6\}) = P_0$ (P מחשבים הסתברות של מאורעות).

ידוע לנו ש-P מקיימת את אקסיומות ההסתברות וכן שלכל תוצאה יש הסתברות שווה.

אקסיומה 2: $1 = P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \dots \cup \{6\})$ (זרים בזוגות)

אקסיומה 3 (זרות לזוגות): $= P(\{1\}) + P(\{2\}) + \dots + P(\{6\}) = P_0 + P_0 + \dots + P_0 = 6P_0$

מסקנה: $1 = 6P_0 \to P_0 = \frac{1}{6}$. מתאים לאינטואיציה.

$P(\{\text{יצא מס׳ זוגי}\}) = P(\{2,4,6\}) = P(\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}) \overset{(\text{אק׳ 3})}{=} P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

תכונות של מידת הסתברות:

עבור כל המשפטים הבאים נניח שאני מבצעת ניסוי עם מרחב מדגם Ω, E, F הם מאורעות ונתונה מידת ההסתברות P על Ω, המקיימת את 3 האקסיומות.

← **טענה 1:** $P(E^c) = 1 - P(E)$.

הוכחה → $1 \overset{\text{אק׳ 2}}{=} P(\Omega) = P(E \overset{\text{איחוד זר}}{\uplus} E^c) \overset{\text{אק׳ 3}}{=} P(E) + P(E^c)$

← **טענה 2:** אם $E \subseteq F$ אז $P(E) \le P(F)$. (דוגמא: $P(\{\text{יצא 2}\}) \le P(\{\text{יצא זוגי}\})$ בהטלת קובייה)

הוכחה → $F = E \uplus (F - E)$. $E \cap (F - E) = \emptyset$. (כי $E \subseteq F$).

$P(F) = P(E \uplus (F - E)) \overset{\text{אק׳ 3}}{=} P(E) + P(F - E)$

לפי אקסיומה 1 $0 \le P(E - F)$ ←

$\Rightarrow P(F) = P(E) + P(F - E) \ge P(E)$

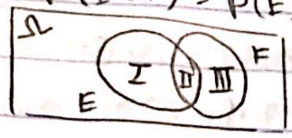
מש״ל.

30/10/17

-המשך-

משפט 3: (נוסחאת הכלה - הפרדה): $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$.

הוכחה ←



נחלק את $E\cup F$ ל-3 חלקים:

$I: E-F$, $II: E\cap F$, $III = F-E$

שלושת הקבוצות I, II, III זרות בזוגות

$$(1)\quad P(E\cup F)=P(I\cup II\cup III)\overset{\text{אקס' 3}}{=}P(I)+P(II)+P(III)$$
$$(2)\quad P(E)=P(I\cup II)=P(I)+P(II)$$
$$(3)\quad P(F)=P(II\cup III)=P(II)+P(III)$$
$$(4)\quad P(E\cap F)=P(II)$$

משתמשים בכולם ומקבלים את התוצאה.

$$(2)\to(1)\Rightarrow P(E\cup F)=P(E)+P(III)\quad(5)$$

(3) מעבירים אגף ב-(3) $\Rightarrow P(F)-P(II)=P(III)\xrightarrow{\text{מציבים את (4)}}P(F)-\underline{P(E\cap F)}=P(III)\quad(6)$

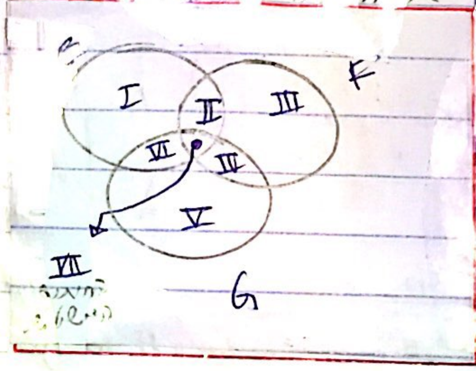
← מציבים את (6) ב-(5) ומקבלים

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

סופרים את $P(II)$ פעמיים ב-$P(E\cup F)$ ולכן צריך להוריד פעם אחת.

משפט 4: $P(E\cup F\cup G)=P(E)+P(F)+P(G)-P(E\cap F)-P(E\cap G)-P(F\cap G)+P(E\cap F\cap G)$

← [illegible] על הציור:



תלמה לוודא לבד, סכמו ובדקו שהשוויון מתקיים

מרחבי מדגם סימטריים:

בהרבה ניסויים לכל התוצאות יש סיכוי שווה להתרחש: קוביה הוגנת, מטבע הוגן, (למשל) טירקום אקראי של חפיסת קלפים.

המרחב מדגם סימטרי: $\Omega=\{1,2,3,\dots,N\}$. יש מס' תוצאות סופי N. $P(\{i\})=\frac{1}{N}$ לכל i:

דומה לדוגמא עם הקוביה ההוגנת.

לכל מאורע: $A=\{n_1,n_2,\dots,n_k\}$

$$\to P(A)=P(\{n_1\}\cup\{n_2\}\cup\dots\cup\{n_k\})\overset{\text{אקס' 3}}{=}\sum_{i=1}^{k}P(\{n_i\})=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{N}=\frac{k}{N}$$

k איברים בסכום. $K=|A|$ מס' האיברים ב-A.

סיכום: במרחב מדגם סימטרי: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

מהנוסחה הזאת נבין שכדי לחשב הסתברויות במרחב מדגם סימטרי רק צריך לספור איברים במאורעות. בעזרת הכלים של קומבינטוריקה.

Scanned by CamScanner

דוגמאות:

1) בכד יש שישה כדורים לבנים וחמישה כדורים שחורים.
שולפים מהכד שלושה כדורים באקראי. בלי החזרה.
מה ההסתברות שאחד הכדורים לבן והשניים האחרים שחורים?
~ יש כמה דרכים שונות לפתרון.

דרך א': $\Omega = \{$לבן 1, לבן 2, ..., לבן 6 ; שחור 1, שחור 2, ..., שחור 5$\}$

איבר כללי של Ω הוא מהצורה (x,y,z). כאשר x,y,z הם "לבן i" או "שחור j".
ומשמעות האיבר הכללי הנה הוא שתוצאות הניסוי היא: כדור ראשון x, כדור שני y
וכדור שלישי z. כלומר יש חשיבות לסדר תוצאות הכדורים:

(שחור 5, שחור 3, לבן 1) $\neq$ (שחור 4, שחור 3, לבן 2)

← מהו $|\Omega|$? ← $|\Omega| = 11\cdot 10\cdot 9 = 990$ (11 כדורים ל-1, 10 לשני...)

מכיוון שלכל כדור יש את אותו סיכוי להישלף בשליפה 1/2/3, מרחב המדגם הוא סימטרי.

$\Rightarrow A = \{$יצא לבן ושני שחורים$\} = \{$לבן בשליפה הראשונה והאחרות שחור$\} \uplus \{$לבן בשליפה 2 והאחרות שחור$\} \uplus \{$לבן בשליפה 3 והאחרות שחור$\}$ (כל המאורעות זרים בזוגות)

$\Rightarrow |\{$לבן בשליפה 1 והשאר שחור$\}| = \overset{\text{לבן}}{6}\cdot\overset{\text{שחור}}{5}\cdot\overset{\text{שחור}}{4} = 120$

$\Rightarrow |\{$לבן בשליפה 2 והאחרים שחור$\}| = \overset{\text{שחור}}{5}\cdot\overset{\text{לבן}}{6}\cdot\overset{\text{שחור}}{4} = 120$

$= |\{$לבן בשליפה 3 באחרים שחור$\}| = \overset{\text{שחור}}{5}\cdot\overset{\text{שחור}}{4}\cdot\overset{\text{לבן}}{6} = 120$

$\Rightarrow |A| = 120+120+120 = 360$

$$\boxed{P(A) = \frac{360}{990} = \frac{4}{11}}$$

דרך ב': $\Omega = \{\{$לבן 1, שחור 2, שחור 1$\}, \{$לבן 6, לבן 5, שחור 2$\}, \{...\}, ...\}$:

התוצאות ב-Ω הן קבוצה של 3 כדורים שנשלפו ללא חשיבות לסדר השליפה.
{הלבן ה-2, השחור ה-3, והשחור ה-4 יצאו מהכד} = {שחור 4, שחור 3, לבן 2} = {לבן 2, שחור 4, שחור 3}.

← מהו $|\Omega|$? בכמה דרכים ניתן לשלוף 3 מ-11 כדורים ללא החזרה
וללא חשיבות לסדר? $|\Omega| = \binom{11}{3}$.

$A = \{$לבן 1, שני שחורים$\} \Rightarrow |A| = \binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{5}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{11}$