תרגיל 6

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

2. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.

(ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\}\forall n$, $O_n = \{1, ..., n\}$.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה ה־p אדית.

3. (תת מרחב קשיר של מרחב לא קשיר)
יהא X מרחב לא קשיר אז קיימת קבוצה סגוחה V לא טרי' כך ש $X = V \uplus V^C$.
הוכיחו כי כל תת מרחב קשיר $A \subseteq X$ מקיים $A \subseteq V^C$ או $A \subseteq V$.

4. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות פתוחות (לא ריקות) כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.

5. הוכיחו: אם $f : X \to Y$ הומיאומורפיזם, ו$A \subseteq X$, אז A הומיאומרפי ל$f(A)$.
(הערה: באותו אופן אפשר גם להוכיח ש $X \setminus A \cong Y \setminus f(A)$)

6. תהא $X = \mathbb{R}$ עם טופלוגית סורגנפרי τ_S : הוכיחו כי

(א) קטעים מהצורה (a,b) פתוחים עבור $a < b$.

(ב) קטעים מהצורה $(a,b]$ אינם פתוחים ואינם סגורים עבור $a < b$.

(ג) קטעים מהצורה $[a,b)$ סגורים (בנוסף לכך שהם פתוחים ע"פ הגדרה) עבור $a<b$.

7. תהא $X=\mathbb{R}$ עם טופלוגית סורגנפרי τ_S (הפתוחות = איחודים כלשהם של קטעים מהצורה $[a,b)$). עבור הקבוצות הבאות מצאו את הפנים והסגור שלהם:

(א) $A=(0,1)$

(ב) $A=[0,1)$

(ג) $A=(0,1]$

(ד) $A=[0,1]$

8. תהא $X=\mathbb{N}$ עם הטופולוגיה $\tau=\{\{1,\ldots,n\}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{\emptyset,\mathbb{N}\}$ עבור הקבוצות הבאות מצאו את הפנים והסגור שלהם:

(א) $A=\{1,\ldots,n\}$ עבור n קבוע כלשהוא.

(ב) $A=\{2,3,\ldots\}=\mathbb{N}\setminus\{1\}$

(ג) $A=\{1,2,3,4,6,7,8\ldots\}=\mathbb{N}\setminus\{5\}$

(ד) $A=2\mathbb{N}=\{2n:n\in\mathbb{N}\}$

(ה) $A\subseteq\mathbb{N}$

9. הוכיחו/הפריכו: (הערה: $int(A)=\mathring{A}$ הוא הפנים של A, ו $cl(A)=\bar{A}$ הוא הסגור של A)

(א) אם $A\subseteq B$ אזי $int(A)\subseteq int(B)$ ו $cl(A)\subseteq cl(B)$

(ב) $int(A_1\cup A_2)=int(A_1)\cup int(A_2)$

(ג) $int(A_1\cap A_2)=int(A_1)\cap int(A_2)$

(ד) תהיינה $\{A_i\}_{i\in I}$אוסף תתי קבוצות אזי $cl(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}cl(A_i)$