הרצאות מד"ר

הרצאה 1

מהי מד"ר?
מד"ר היא משוואה שמערבת משתנה, פונקציה שתלויה במשתנה ואת נגזרותיה.
למשל:

1. $(y')^2 + y + \sin(x) = 0$.
2. $e^{y'''} - 5y''x = 0$.

באופן כללי, אם F היא פונקציה של כמה משתנים, אז $F(x, y, y', ...) = 0$ היא משווה דיפרנציאלית.
פתרון של מד"ר הינה פונקציה גזירה מספיק פעמים, y, שאם נציב אותה במד"ר נקבל שוויון.
נשים לב שיש מד"רים שאנחנו כבר יודעים לפתור:

1. $x^2 + 2x + 1 = 0$.
2. $y' = x^2$
   נשים לב שיש פה יותר מפתרון אחד. $y = \dfrac{x^3}{3} + c$ לכל c.
3. $y' = y$.
   פתרון: מחפשים פונקציה ששווה לנגזרת שלה. התשובה היא: $y = e^x$.
4. $y'' = -y$.
   פתרון: $y = \cos(x)$. אז $y' = -\sin(x)$ ו$y'' = -\cos(x)$.

הגדרה 0.1 הסדר של מד"ר היא הנגזרת הגבוהה ביותר המופיעה בה.

למשל:

1. $yy' - \ln x = 0$ היא מד"ר מסד ראשון.
2. $(y''')^5 + 4y'' + e^y = 0$ היא מד"ר מסדר שלישי.

בשביל מה צריך לדעת לפתור מד"רים? ניתן דוגמא.
החוק השני של ניוטון אומר: $F = ma$ כאשר F הוא הכח המופעל על הגוף, m הוא מסת הגוף, וa היא תאוצת הגוף. נסמן ב$x(t)$ את המיקום של הגוף לפי הזמן, וב$v(t)$ את מהירותו. ידוע ש$v = \dfrac{dx}{dt}$ ו$a = \dfrac{dv}{dt}$. קיבלנו: $F = mx''$. אם אנחנו יודעים את מסת

הגוף, ואת הכח המופעל עליו, ואנחנו רוצים לדעת איפה הגוף יהיה בכל רגע נתון, עלינו פתור מד"ר. המד"ר הנ"ל הוא פשוט אמנם, אבל מה קורה אם בנוסף פועל על הגוף כח שתלוי במיקום שלו (למשל, במקרה של קפיץ), במקרה כזה נצטרך לפתור לדוגמא מד"ר מהסוג: $F + \lambda x = mx''$, והמטרה היא למצוא את פונקציית המיקום, כלומר x. זאת כבר דוגמא יותר מסובכת.

דוגמא נוספת:

ידוע שאוכלסיית חיידקים מתרבה בתנאי מעבדה אידיאליים בקצב פרופורציונלי לגודלה. כלומר, אם בזמן נתון t כמות האוכלוסיה הוא $y(t)$ אז באותו רגע קצב הגידול הוא $\lambda y(t)$. (עבור איזשהו λ נתון). כלומר, $y' = \lambda y$. המטרה שלנו היא למצוא כמה חיידקים יהיו בכל זמן נתון.

בהמשך נדגים את פותרים את הבעיה הזאת.

בשביל לדעת לפתור מד"רים אנחנו צריכים הקדמה קצרה על פונקציות עם כמה משתנים.

פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא "כלל" שמתאים לכל nיה של מספרים ממשיים, מספר ממשי.

דוגמאות:

1. $f(x, y) = x^2 y$
2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \sin(\dfrac{x_2}{x_3})$

נשים לב שהפונקציה בדוגמא השניה לא מוגדרת לכל שלשה שניתן.

הגדרה: הקבוצה המקסימלית $A \subseteq \mathbb{R}^n$ אשר לכל נקודה בתוכה הפונקציה f מוגדרת, נקראת תחום ההגדרה של f.

דוגמאות:

1. תחום ההגדרה של $f(x, y) = x + \dfrac{1}{x - y}$ הוא כל הזוגות עבורן $x \neq y$.
2. תחום ההגדרה של $\ln(1 - x^2 - y^2)$ הוא: $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

רציפות:

בדומה לפונקציות של משתנה אחד, f תקרא רציפה בנקודה $(x_1, ..., x_n)$ אם לכל נקודה $(a_1, ..., a_n)$ ש"קרובה" אליה מספיק, $f(a_1, ..., a_n)$ "קרוב" ל$f(x_1, ..., x_n)$. ניתן הגדרה פורמלית:

סביבה מעגלית ברדיוס r של נקודה $(x_1, ..., x_n)$ היא: $\{(a_1, ..., a_n) : (a_1 - x_1)^2 + ... + (a_n - x_n)^2 < r^2\}$

הגדרה 0.2 תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה $(x_1, ..., x_n)$. f תיקרא רציפה בנקודה הזאת אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם נקודה שייכת לסביבה המעגלית ברדיוס שלδ $(x_1, ..., x_n)$ אז התמונה שלה שייכת לסביבה המעגלית ברדיוס ϵ של $f(x_1, ..., x_n)$. כלומר, המרחק בין שני המספרים הממשיים קטן מאפסילון.

דוגמא: נראה שהפונקציה $f(x, y) = x^2 + y^2$ רציפה בנקודה $(0, 0)$:

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \sqrt{\epsilon}$. אם $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 < \delta^2$ אז $|f(x, y) - f(0, 0)| = x^2 + y^2 < \epsilon$.

כמו באינפי 1, בד"כ לא נוכיח רציפות בצורה ישירה. אלא נשתמש במשפט הבא:

משפט 0.3 א. פונקציה של שני משתנים אשר מתקבלת מפונקציות אלמנטריות של משתנה יחיד ע"י מספר סופי של פעולות אלגבריות, רציפה בכל תחום הגדרתה.

ב. אם f, g רציפות בנקודה, אז גם $f \cdot g, f \pm g$ רציפות בנקודה. אם $g \neq 0$ באותה נקודה, אז גם $\dfrac{f}{g}$ רציפה בנקודה.

דוגמאות:

1. $f(x,y)=\sin(xy)$ היא פונקציה רציפה כי היא הרכבה של $\sin$ על מכפלה של פונקציות שכל אחת רציפה.
2. $\frac{\ln(x+y)}{xy}$ רציפה בכל תחום הגדרתה.

נגזרות חלקיות

$f_x(x_0,y_0)=\frac{df}{dx}(x_0,y_0)=\lim\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$. באופן אנלוגי מגדירים f_y .

דוגמאות:

1. $f(x,y)=x^3y^2+2$.
אזי: $f_x=3x^2y^2$, $f_y=2x^3y$
2. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y} & y\neq 0\\ x & y=0\end{cases}$$
עבור $y\neq 0$, $f_x=\frac{1}{y}, f_y=-\frac{x}{y^2}$

עבור $y=0$: $f_x=\lim\frac{f(x+\Delta x,0)-f(x,0)}{\Delta x}=1$. $f_y=\lim\frac{f(x,\Delta y)-f(x,0)}{\Delta y}=$ $\lim\frac{\frac{x}{\Delta y}-x}{\Delta y}=\lim\frac{x-(\Delta y)x}{\Delta y^2}$ ניתן לראות שבנקודה $(0,0)$ הנגזרת היא 0, ואילו בכל נקודה $x\neq 0$ אין נגזרת (נקבל קבוע חלקי משהו ששואף ל0).

נשים לב שהנגזרת החלקית היא גם פונקציה בn משתנים ולכן גם לה קיימות נגזרות חלקיות. אז אפשר להגדיר "נגזרות חלקיות שניות". למשל: f_{xx}, f_{xy} .

ניתן עכשיו כמה משפטים בנוגע לנגזרות חלקיות, בלי להוכיח.

משפט 0.4 תהי $F(x,y)$ ונניח כי הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בD ו$F_y\neq 0$. תהי $y=y(x)$ פונקציה גזירה בקטע מסויים I, ונניח כי הגרף שלה בI מצוי בתחום D. אז בקטע I ניתן להגדיר פונקציה של משתנה יחיד $F(x,y(x))$ ומתקיים: $\frac{dF}{dx}=F_x+F_yy'$.

דוגמא: $F(x,y)=x^3y^2+2$אז: $F_x=3x^2y^2, F_y=2x^3y$ נניח $y=3x^5$. מצד אחד, אפשר פשוט להציב את y בF ולקבל פונקציה של x ולחשב את הנגזרת שלה. נקבל: $F=x^3(3x^5)^2+2=9x^{13}+2$. נגזרת לפי x שווה: $13\cdot 9x^{12}$. מצד שני, ניתן להשתמש בנוסחא: $\frac{dF}{dx}=3x^2y^2+2x^3yy'$. $y'=15x^4$. נציב את y וy' במשוואה ונקבל: $3x^2(3x^5)^2+2x^3(3x^5)15x^4=117x^{12}$.

משפט 0.5 תהי $f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות בתחום מעגלי D, אז אם $\frac{df}{dx}=0$, הפונקציה תלויה בy בלבד, וכן לגבי המשתנה y .

משפט 0.6 תהי $f(x,y)$ בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני רציפות בנקודה (x_0,y_0) . אזי $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

דוגמא: $f(x,y)=x^2y+y^3e^{xy}$.

משוואות לינאריות מסדר ראשון

נתחיל בדוגמא שהבאנו קודם, $y' = \lambda y$.
נציג את המשוואה ככה: $y' - \lambda y = 0$.
נכפול את שני אגפי המשוואה ב$e^{-\lambda t}$.

$$e^{-\lambda t}(y' - \lambda y) = 0$$

.

מכיוון ש$e^{-\lambda t}$ לא מתאפסת, לשתי המשוואות יש את אותם פתרונות.
כעת נשים לב שאגף שמאל הוא בדיוק הנגזרת של $e^{-\lambda t}y$.
כלומר, ניתן לכתוב את המשוואה ככה: $(e^{-\lambda t}y)' = 0$.
ידוע שנגזרת של פונקציה היא 0 אמ"ם הפונקציה קבועה. לכן: $e^{-\lambda t}y = c$. כלומר, $y = ce^{-\lambda t}$.

כלומר, פונקציה מהצורה הזו היא הפתרון הכללי של המשוואה. מהו מספר החיידקים בכל רגע? לא ניתן לקבוע, זה תלוי בc. כמובן, שמספר החיידקים לא נקבע רק לפי קצב הריבוי, אלא לפי כמה חיידקים היו בהתחלה. ואכן, ניתן לגלות את c לפי מספר החיידקים בהתחלה. אם למשל ברגע $t = 0$ היו y_0 חיידקים, אז $y(0) = y_0 = ce^0 = c$. ולכן בכל רגע יהיו $y_0e^{-\lambda t}$.

הגדרה 0.7 משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון נקראת לינארית אם אפשר להביאה לצורה:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

כאשר $a(x)$ ו$b(x)$ הן פונקציות נתונות.
הפונקציות $a(x)$ ו$b(x)$ מכונות מקדמי המשוואה. אם $b(x) = 0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית.
דוגמאות:

1. $y' + x^2y = 0$ היא לינארית הומוגנית. $a(x) = x^2$.
2. $y' + y^2 = 0$ היא לא לינארית.
3. $yy' = x$ היא לא לינארית.
4. $5y' + 3y = 0$ היא לינארית הומוגנית, כי ניתן לכתוב אותה גם כ $y' + \frac{3}{5}y = 0$.

כעת, נביא אלגוריתם לפתרון מד"ר לינאריות מסדר ראשון. נניח ש$a(x)$ ו$b(x)$ רציפות. נתחיל עם מד"ר הומוגניות. נשחזר את הפתרון ממקודם:

$$y' + a(x)y = 0$$

.

נכפול בגורם מהצורה $e^{A(x)}$ כדי שאגף שמאל יהיה נגזרת של $ye^{A(x)}$. אנחנו יודעים ש $(ye^{A(x)})' = y'e^{A(x)} + yA'(x)e^{A(x)} = e^{A(x)}(y' + A'(x)y)$.
לכן צריך $A'(x) = a(x)$. נבחר $A(x) = \int a(x)$.

כעת, $(ye^{A(x)})'=0$ כלומר, $ye^{A(x)}=c$. $y=ce^{-A(x)}$.

הערה: ניתן להציג את שיטת הפתרון באופן הבא (דרך שעוזרת לזכור): $\frac{dy}{ax}=-a(x)y$.

$\frac{dy}{y}=-a(x)dx$. נפעיל אינטגרציה על שני הצדדים לפי המשתנה המתאים, ונקבל $\ln(y)=-\int a(x)dx+c$. כלומר, $y=e^{c-A(x)}=c'e^{-A(x)}$.

דוגמא: פתור את המשוואה: $y'+2xy=0$.

כעת, נלמד לפתור משוואות לא הומוגניות.

$y'+a(x)y=b(x)$

נכפיל ב$e^{A(x)}$ כאשר $A(x)=\int a(x)$.

נקבל: $(ye^{A(x)})'=b(x)e^{A(x)}$

מכאן: $ye^{A(x)}=\int b(x)e^{A(x)}+c$.

ולכן $y=e^{-A(x)}(\int b(x)e^{A(x)}+c)$.

דוגמא: פתרו את המשוואה $y'+2xy=8x$

נכפיל את שני האגפים בe^{x^2}. נקבל: $(ye^{x^2})'=8xe^{x^2}$.

ומכאן: $ye^{x^2}=\int 8xe^{x^2}+c=4e^{x^2}+c$.

לכן $y(x)=4+ce^{-x^2}$.

תנאי התחלה

כפי ששמנו לב, בפתרון המד"ר תמיד מתקבל איזשהו משתנה c. (מכיוון שפתרון המד"ר תלוי באינטגרציה, ולכל פונקציה יש כמה פונקציות קדומות שנבדלות בקבוע).

נוכל לגלות את ערך הc אם נטיל תנאי התחלה על המשוואה. כלומר, מחפשים פונקציה y שתקיים את משוואת המד"ר, ובנוסף תקיים את תנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0$ עבור x_0 וy_0 מספרים נתונים. למשל, נוסיף דמשוואה $y'+2xy=8x$ את תנאי התהתחלה $y(1)=6$.

ראינו שהפתרון הכללי הוא $y(x)=4+ce^{-x^2}$. נציב $x=1$ ונקבל את השוויון $4+ce^{-1}=6$.

לכן $c=2e$. כלומר, הפתרון הפרטי הוא $y(x)=4+2e^{1-x^2}$.

משפט הקיום והיחידות

משפט 0.8 תהי נתונה משוואה $y'+a(x)y=b(x)$ כאשר מקדמיה $a(x)$ ו$b(x)$ הם פונקציות רציפות בקטע (α,β). ויהי נתון ההתחלה $y(x_0)=y_0$. כאשר y_0 מספר כלשהו ו$x_0\in$ (α,β). אזי קיים פתרון יחיד למשוואה המוגדר בכל הקטע ומקיים את ההתחלה.

הוכחה: ההוכחה נובעת מאלגוריתם הפתרון.

אנחנו כבר יודעים שהמשוואה שלנו שקולה למשוואה $(ye^{A(x)})'=b(x)e^{A(x)}$. נבצע את האינטגרציה כך: בתור פונקציה קדומה של $b(x)e^{A(x)}$ נבחר את הפונקציה $\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)}dt+$ c. (כזכור, אם f רציפה בקטע (α,β) אז לכל $\alpha<x_0<\beta$ הפונקציה $\int_{x_0}^{x}f(t)dt$ היא פונקציה קדומה של f בקטע (α,β)).

נקבל $ye^{A(x)}=\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)}dt+c$

ולכן הפתרון הכללי הוא $y(x)=e^{-A(x)}(\int_{x_0}^{x}b(t)e^{A(t)}dt+c)$.

עלינו להראול שמתוך אוסף זה ניתן לבחור אחת ויחידה שמקיימת את תנאי ההתחלה.

נציב בפתרון $x=x_0$ ונקבל:

$y(x_0)=e^{-A(x_0)}(0+c)=e^{A(x_0)}\cdot c$.

לכן התנאי $y(x_0)=y_0$ מחייב: $c=y_0e^{A(x_0)}$. כלומר, קיים פתרון אחד ויחיד. מש"ל.

תרגיל: מצא את כל הפתרונות של המשוואה $y' + \frac{\sin x + \exp(x)}{x^2 + \exp(x)} y = 0$ המקיימים $y(0) = 0$.

פתרון: $a(x)$ רציפה בכל המישור ולכן לכל זוג נקודות קיים פתרון יחיד. קל לראות ש$y(x) = 0$ הוא פתרון כזה, ולכן הוא היחיד.

תרגיל: נסה למצוא פתרון פרטי של המשוואה $x^2y' + 2xy = 1$ המקיים $y(0) = 2$

פתרון: קל לראות שלא יכול להיות פתרון כזה, כי עבור $x = 0$ המשוואה לעולם לא מתקיימת. לכן, פונקציה שפותרת את המשוואה לא יכולה להיות מוגדרת ב0.

שאלה: ניתן לכתוב את המשוואה גם בצורה הזו: $y' + \frac{2}{x} + y = \frac{1}{x^2}$. זאת משוואה לינארית מסדר ראשון. האם העובדה שאין לה פתרון בנקודה מסויימת לא סותרת את משפט הקיום והיחידות?

תשובה: לא. כי $a(x) = \frac{2}{x}$ לא רציף בנקודה 0. משפט הקיום והיחידות דרש ש$a(x), b(x)$ יהיו רציפים.

הערה: מה קורה אם אי אפשר למצוא את האינטגרל בתהליך פתירת המד"ר?

למשל: $y' - 2xy = 1$. נחפש פתרון פרטי שמקיים $y(0) = 0$.

נכפול את שני האגפים בe^{-x^2} ונקבל $(ye^{-x^2})' = e^{-x^2}$. ולכן $y(x) = e^{x^2}(\int e^{-t^2}dt + c)$.

בעיה: e^{-t^2} היא פונקציה רציפה בכל המישור, ולכן יש לה פונקציה קדומה. אבל הוכחתם בחדו"א 2 שלא ניתן לחשב את האינטגרל ולהביע אותו בעזרת פונקציות אלמנטריות (פולינומים, פונקציות לוגריתמיות, פונקציות טריגונומטריות). אם כן, איך נמצא את c?

פתרון: בתור פונקציה קדומה נבחר את $\int_0^x e^{-t^2} df + c$. כעת, $y(x) = e^{-x^2}(\int_0^x e^{t^2} dt + c)$. ולכן $y(x) = 1(0 + c) = c$. מסקנה: $c = 0$.

לכאורה, עדיין יש בעיה. הפתרון הוא $y(x) = e^{x^2} \int^x e^{-t^2} dt$. זאת פונקציה שלא ניתן לחשב במפורש שום ערך שלה. אבל למעשה זאת לא בעיה, אנחנו יכולים לחשב ערכים בקירוב כרצוננו. למעשה, גם פונקציות "מפורשות" כמו $\sin(x)$ וe^x אנחנו לא באמת יודעים לחשב אלא רק מוצאים קירובים לפי רמת הדיוק הנדרשת. ■

מושג הפתרון בצורה כללית

במשוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון מופיעים : המשתנה x. פונקציה נעלמת $y(x)$ ונגזרתה $y'(x)$. הצורה הכללית היא $F(x, y, y')$. נניח שאפשר לחלץ את $y'(x)$ מהמשוואה ולרשום אותה כך: $y' = f(x, y(x))$. זאת נקראת הצורה הסטנדרטית.

למשל במשוואה לינארית: $y' + a(x)y = b(x)$, אפשר לכתוב $y' = -a(x)y + b(x)$.

ניתן להתבונן בפונקציה $f(x, y)$ כפונקציה של שני משתנים. כלומר, לשכוח לרגע מהעובדה ש$y = y(x)$ הוא פונקציה של x. באופן דומה, כל פונקציה של שני משתנים $f(x, y)$ יוצרת מד"ר באופן הבא: $y' = f(x, y(x))$.

למשל: $f(x, y) = y + xy^2$, אז המד"ר המתאים הוא $y' = y(x) + xy^2(x)$.

הערה: לא כל מד"ר מסדר ראשון ניתן לרשום בצורה הסטנדרטית. למשל: $xy' + e^{yy'} + \sin(x) + y = 0$. לא ניתן לחלץ את y'. אנחנו נטפל בקורס רק במשוואות שניתן להציג בצורה הסטנדרטית.

נעבור להגדרה של מושג הפתרון של משוואה בצורה הסטנדרטית.

נשים לב שהפונקציה $f(x, y)$ בד"כ לא מוגדרת בכל המישור אלא בתחום מסויים. למשל: $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$ מוגדרת בעיגול הפתוח $x^2 + y^2 < 1$. לפונקציה זו מתאימה המשוואה $y' = \ln(1 - x^2 - y^2)$. לכן אם פונקציה גזירה כלשהי $y(x)$ היא פתרון של

המשוואה אז מתקיים $x^2 + y^2(x) < 1$. כלומר, גרף הפונקציה נמצא כולו בתוך תחום ההגדרה של $f(x,y)$.

הגדרה 0.9 תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D של המישור. פתרון של המשוואה $y' = f(x,y)$ בקטע פתוח I (סופי או אינסופי) הוא פונקציה $y(x)$ בעלת התכונות הבאות:
א. $y(x)$ גזירה בכל נקודה בI.
ב. הגרף של $y(x)$ מצוי בD. כלומר, לכל $x \in I$, $(x, y(x)) \in D$.
ג. הפונקציה $y(x)$ ממלאת את המשוואה בקטע I. כלומר, לכל $x \in I$, $y'(x) = f(x, y(x))$.

דוגמא: נתבונן במשוואה $y' = -\frac{x}{y}$.

כאן אי אפשר לבחור כתחום ההגדרה של $f(x,y) = -\frac{x}{y}$ את כל המישור, אלא רק את חצי המישור העליון ($y > 0$) או חצי המישור התחתון ($y < 0$) . בהמשך נלמד איך למצוא את הפתרונות של משוואה זו, אך כבר עכשיו אפשר לבדוק ולאמת שהפונקציות $y_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ ו$y_2(x) = -\sqrt{1-x^2}$ הן פתרונות של המשוואה בקטע $I = (-1,1)$. גרף הפתרון $y_1(x)$ נמצא בחצי המישור העליון, ואילו גרף הפתרון $y_2(x)$ נמצא בחצי המישור התחתון. באופן כללי, לכל מספר חיובי c, הפונקציות $y_1(x) = \sqrt{c-x^2}$ ו$y_2(x) = -\sqrt{c-x^2}$ הן פתרונות של המשוואה בקטע $(-c,c)$ בתחום המתאים.

הערה: בשיעור הקודם דנו בפתרונות של משוואה לינארית, ולא טרחנו לדבר על תחומי הגרדה של הפונקציה ובאילו קטעים קיים פתרון וכו'. יש לכך שתי סיבות:

1. אם $a(x)$ ו$b(x)$ מוגדרים בקטע (α,β) אז תחום הגדרתה של הפונקציה $f(x,y) = a(x)y + b(x)$ הוא הרצועה: $D = \{(x,y) | \alpha < x < \beta, -\infty < y < \infty\}$. ולכן אם הפונקציה $y(x)$ מוגדרת בקטע I, אז הגרף שלה בהכרח מצוי בתוך D.

2. אם $a(x)$ ו$b(x)$ רציפים בקטע (α,β) אז כל פתרון $y(x)$ מוגדר בכל הקטע (α,β) ולכן לא צריך לדבר על הקטע שבו הוא פותר.

הגדרה 0.10 תהי נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $y' = f(x,y)$ כאשר הפונקציה f מוגדרת בתחום D במישור. בעיית הערך ההתחלתי עבור משוואה זו היא המשוואה הדיפרנציאלית יחד עם הסייג $y(x_0) = y_0$ כאשר x_0 וy_0 הם מספרים נצונים והנקודה $(x_0, y_0) \in D$. כלומר, בעיית הערך ההתחלתי היא זוג משוואות:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

משפט הקיום והיחידות

נתחיל מדוגמא: נסתכל על שתי בעיות הערך ההתחלתי הבאות:

.1

$$\begin{cases} y' = 3y \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

.2

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

שתי הבעיות הללו הן מהסוג שהגדרנו של $y' = f(x,y)$ ובשתיהן $f(x,y)$ מוגדרת במישור כולו. בבעיה הראשונה המשוואה היא לינארית ופתרונה הכללי הוא $y = ce^{3x}$. עבור תנאי ההתחלה $y(0) = 0$ צריך לבחור $c = 0$. כלומר, לבעיה יש פתרון יחיד $y(x) = 0$.

עבור המשוואה השניה, קל לראות ש$y(x) = 0$ הוא פתרון. אולם, ניתן למצוא פתרונות נוספים.

טענה: לכל $\alpha > 0$ הפונקציה

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ (x-\alpha)^3 & \alpha \le x \end{cases}$$

היא פתרון למשוואה בכל המישור.

הוכחת הטענה: ראשית, תנאי ההתחלה מתקיימים. צריך להוכיח שהמד"ר מתקיים. בכל נקודה שונה מα זה ברור. נחשב את הנגזרת עבור $x = \alpha$. נוכיח שהנגזרת הימנית שווה לשמאלית שווה ל0. ניזכר כי נגזרת חד צדדית בα היא $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(\alpha + \Delta x) - f(\alpha)}{\Delta x}$. חישוב.

משפט 0.11 תהי $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים המוגדרת ורציפה במלבן הפתוח $D = \{(x,y) | \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta\}$ ובעלת נגזרת חלקית f_y רציפה במלבן D. תהי (x_0, y_0) נקודה בD. אזי:

א. קיים קטע פתוח I המכיל את הנקודה x_0 ובו קיים פתרון $y = y(x)$ לבעיית הערך ההתחלתי.

ב. אם $y_1(x)$ ו$y_2(x)$ ם פתרונות הבעיה המוגדרים שניהם בקטע פתוח כלשהו המכיל את x_0 אזי $y_1(x) = y_2(x)$ בקטע זה.

הערה: בבעיה השניה שפתרנו קודם הפונקציה מוגדרת ורציפה בכל המישור, אולם הנגזרת החלקית לפי y לא מוגדרת ב$(0,0)$ ולכן המשפט לא מתקיים.

תרגיל: כמה פתרונות יש לבעיית הערך ההתחלתי

$$\begin{cases} y' = x^3 + 5x \sin y \\ y(5) = 7 \end{cases}$$

פתרון: $f(x,y) = x^3 + 5x \sin y$ היא פונקציה מוגדרת ורציפה בכ המישור, ונגזרתה לפי y מוגדרת ורציפה בכל המישור, ולכן קיים לה פתרון יחיד.

הערה: קיום הפתרון הוא לוקלי, כלומר, גם אם התנאים על f מתקיימים בתחום רחב המכיל את (x_0, y_0) אין ערובה לקיום פתרון אלא בסביבה מסויימת של x_0. נדגים זאת בבעיה הבאה:

$$\begin{cases} y' = 5(1 + y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

טענה: הפונקציה $y=\tan 5x$ היא פתרון של המערכת. הוכחה: חישוב.

נשים לב כי $f(x,y)=5(1+y^2)$ עונה על תנאי המשפט ולכן זהו הפתרון היחיד. אולם, למרות ש$f(x,y)$ מוגדרת ורציפה בכל המישור, וכן נגזרתה לפי y, בכל זאת הפתרון מוגדר רק בקטע $(-\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{10})$.

מד"ר לא לינאריות מסדר ראשון

משוואה פרידה.

מקרה ראשון:

תהי משוואה $y'=f(x,y)$ ונניח שf לא תלוי בx. כלומר, $y'=f(y)$.

אם f וf' רציפות בקטע (γ,δ) אז f מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בתחום

$$D=\{(x,y)|\gamma<y<\delta\}$$

נניח תחילה כי f אינה מתאפסת בקטע. אז בגלל שהיא רציפה, היא שומרת על הסימן בקטע. לכן אם $y=y(x)$ הוא פתרון בקטע, אז y' שומרת על הסימן ולכן $y(x)$ מונוטונית ומכאן הפיכה. קיימת פונקציה הופכית $x=x(y)$ שנגזרתה: $\frac{dx}{dy}=1/\frac{dy}{dx}$. מכאן נובע שהפונקציה $x(y)$ מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית: $x'(y)=\frac{1}{f(y)}$. משוואה מסוג כזה אנחנו כבר יודעים לפתור: $x(y)=\int^y\frac{du}{f(u)}+c$. הפתרון ניתן בצורה של x כפונקציה של y. אם אפשר, נלחץ את y כפונקציה של x, ואם לא, נשאיר את הפתרון ככה.

דוגמא: פתור את המד"ר $y'=y^2$.

פתרון: בקטע $(0,\infty)$ הפונקציה f חיובית, ולכן יש לה הופכית שמקיימת $x'(y)=\frac{1}{y^2}$.

אז $x(y)=-\frac{1}{y}+c$. נקבל ש $y=\frac{1}{c-x}$. פתרון זה מוגדר בתחום $x<c$ (כי דנו בתחום $y>0$).

גם בתחום $y<0$ הפונקציה לא מתאפסת, ולכן זה פתרון המשוואה גם בקטע $x>c$.

פתרון נוסף שקל לראות הוא $y\equiv 0$. פתרון זה מכונה הפתרון הסינגולרי.

ניתן לראות שבכל נקודה במישור עובר פתרון אחד ויחיד, בהתאם למשפט הקיום והיחידות.

במקרה ש$f(y)$ מתאפס בנקודות אחדות בקטע (γ,δ) פועלים דוה. אם $f(y_0)=0$ אז הפונקציה הקבועה $y(x)=y_0$ היא פיתרון. פתרונות אלו נקראים הפתרונות הסינגולריים. הגרפים שלהם הינם קווים ישרים המחלקים את הרצועה:

$$D=\{(x,y)|\gamma<y<\delta\}$$

לרצועות "צרות" יותר. בכל רצועה כזאת $f(y)$ לא מתאפס, את הפתרונות ברצועות האלו אנחנו כבר יודעים למצוא.

דוגמא: נתונה המד"ר $y'=y^2-1$. הפונקציה f מקיימת את תנאי משפט הקיום והיחידות בכל המישור. היא מתאפסת בנקודות $y=1$ ו$y=-1$. לכן יש לה שני פתרונות סינגולריים: $y(x)=1$ ו$y(x)=-1$.

עבור כל פתרון שאינו סינגולרי קיימת פונקציה הפוכה $x(y)$ הפותרת את המשוואה: $x'(y) = \frac{1}{y^2-1}$.

מכאן: $x = \int^y \frac{du}{u^2-1} + c = \frac{1}{2}\ln|\frac{y-1}{y+1}| + c$.

לכן: $|\frac{y-1}{y+1}| = e^{-2c}e^{2x}$.

אנו דנים עתה בפתרונות הלא סינגולריים. כל פתרון כזה עובר בתוך אחת הרצועות: $y > 1$ או $-1 < y < 1$ או $y < -1$.

אם הפתרון עובר ברצועה $y > 1$ או $y < -1$ אז $\frac{y-1}{y+1}$ חיובי. נקבל כי כל פתרון כזה נרשם בצורה: $\frac{y-1}{y+1} = e^{-2c}e^{2x}$.

אם פתרון עובר ברצועה $-1 < y < 1$, הרי ש $\frac{y-1}{y+1}$ קטן מאפס, ולכן פתרון כזה נרשם בצורה: $\frac{y-1}{y+1} = -e^{-2c}e^{2x}$.

ניתן לאחד את שני המקרים בנוסחא: $\frac{y-1}{y+1} = \pm e^{-2c}e^{2x}$.

עתה, נשים לב שאם c הוא מספר כלשהו הרי ש $\pm e^{-2c}$ הוא קבוע שרירותי, ולכן נוכל לרשום גם $\frac{y-1}{y+1} = \tilde{c}e^{2x}$. מהנוסחא האחרונה נקבל כי $y = \frac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$.

נשים לב שהפתרונות העוברים בתוך הרצועה $-1 < y < 1$ מתקבלים עבור ערכים שליליים של הקבוע c. פתרונות אלה קיימים בכל הישר. עבור כל ערך חיובי של c מתקבלים שני פתרונות. למשל אם $c = 1$, אז פתרון אחד המתאים ל $c = 1$ הוא:

$$\begin{cases} y = \frac{1+e^{2x}}{1-e^{2x}} & x < 0 \end{cases}$$

.

פתרון זה עובר ברצועה $y > 1$.

הפתרון האחר ניתן ע"י נוסחא אך בתחום $x > 0$. פיתרון זה עובר ברצועה $y < -1$.

הכללה:

נסתכל על המשוואה: $y' = \frac{y^2}{x+1}$. היא שקולה למשוואה: $\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x+1}$. נשים לב שאגף שמאל הוא הנגזרת לפי x של הפונקציה $-\frac{1}{y(x)}$. (לפי כלל השרשרת). אגף ימין הוא כמובן הנגזרת של $\ln|x+1|$. אם כן, ניתן לקרוא את המשוואה הנתונה ככה: $\frac{d}{dx}(\frac{1}{y(x)} + \ln|x+1|) = 0$.

ומכאן, $\frac{1}{y} + \ln|x+1| = c$. כלומר, $y = \frac{1}{c\ln|x+1|}$. אלו הם הפתרונות אשר אינם מקבלים את הערך 0, ואליהם יש להוסיף את הפתרון הסינגולרי $y(x) = 0$. (איבדנו אותו כשחילקנו בy^2).

הגדרה 0.12 משוואה דיפרנציאית מסדר ראשון נקראת פרידה אם אפשר להביאה לצורה: $y' = X(x)\cdot Y(y)$ כאשר X היא פונקציה של x וY היא פונקציה של y. נניח כי הפונקציות $X(x)$ ו$Y(y)$ מקיימות את התנאים הבאים:

1. $X(x)$ רציפה בקטע (α,β)
2. $Y(y)$ רציפה בקטע (γ,δ) ונגזרתה $Y'(y)$ רציפה בקטע זה.

אז מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות במלבן: $D=\{(x,y)|\alpha<x<\beta,\gamma<y<\delta\}$.

אכן, הפונקציה $X(x)Y(x)$ רציפה בD ונגזרתה החלקית לפי y, $X(x)\cdot Y'(y)$ רציפה במלבן הזה.

אלגוריתם לפיתרון:

ראשית, נמצא את הפתרונות הסינגולריים מהצורה $y(x)=y_0$ כאשר $Y(y_0)=0$.

אם $y(x)$ הוא פתרון לא סינגולרי, הרי ש$Y(y(x))\neq 0$ לכל x שעבורו מוגדר הפתרון. הסבר: אחרת יש נקודה x_0 שבה $y(x_0)=y_0$ עבור y_0 פתרון של $Y(y)=0$. אבל הפתרון הסינגולרי $y(x)=y_0$ עובר גם הוא בנקודה הזאת, בסתירה למשפט הקיום והיחידות.

כעת, נקבל ש$y(x)$ יפתור את המשוואה $\frac{y'}{Y(y)}=X(x)$. אגף שמאל הוא הנגזרת לפי x של הפונקציה: $\tilde{Y}(y)=\int^y\frac{du}{Y(u)}$(לפי כלל השרשרת). אגף ימין הוא הנגזרת של הפונקציה: $\tilde{X}(x)=\int^x X(t)dt$. המשוואה אם כן הינה: $\frac{d}{dx}[\tilde{Y}(y(x))-\tilde{X}(x)]=0$ שפתרונה: $\tilde{Y}(y(x))-\tilde{X}(x)=c$.

הערה: יש דרך מקובלת לסמן את צורת הפתרון הזאת: את המשוואה $y'=Y(y)X(x)$ ניתן לרשום גם כ $\frac{dy}{dx}=Y(y)X(x)$, ומכאן $\frac{dy}{Y(y)}=X(x)dx$. נפעיל אינטגרל על שני האגפים: $\int^y\frac{dt}{Y(y)}=\int^x X(x)dx+c$.

דוגמא: $y'=4x(y+1)^2$. כלומר, $\frac{dy}{dx}=4x(y+1)^2$ אז $\frac{dy}{(y+1)^2}=4xdx$. נפעיל אינטגרל: $\int^y\frac{du}{(u+1)^2}=\int^x 4udu$ נקבל: $-\frac{1}{y+1}=2x^2+c$ ולכן $y=\frac{1}{-2x^2-c}-1$.
בנוסף יש את הפתרון הסינגולרי $y(x)=-1$.

ניכר מן הדיון שלפעמים יש עדיפות להציג את y כמשתנה תלוי בx, ואילו לפעמים יש עדיפות להציג את x כמשתנה תלוי בy. לכן נעדיף לתת הצגה סימטרית.

תהי מד"ר: $y'=f(x,y)$ כלומר $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. נכתוב אותה בצורה סורמלית כך: $f(x,y)dx-dy=0$. נכפול בפונקציה $P(x,y)$ השונה מ0, ונקבל $P(x,y)f(x,y)dx-P(x,y)dy=0$. נסמן $X(x,y)=P(x,y)f(x,y)$ ו$Y(x,y)=-P(x,y)$, ולפנינו הצגה סימטרית של המד"ר: $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$. מהצגה זו נוכל לעבור להצגה הסטנדרטית אם נרשום: $y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{X}{Y}$. ואם מבחינת הנוחיות עדיף להתייחס לx כפונקציה של y, נרשום: $x'=\frac{dx}{dy}=-\frac{Y}{X}$.

נחזור על תורת המשוואות הפרידות בנוסח סימטרי. הצורה הכללית ביותר בה ניתן לכתוב משוואה פרידה היא:

$$X_1(x)Y_1(y)dx+X_2(x)Y_2(y)=0$$

.

נעשה הפרדה ע"י חילוק ב$Y_1(y)X_2(x)$:

$$\frac{X_1(x)}{X_2(x)}dx+\frac{Y_2(y)}{Y_1(y)}dy=0$$

.

הפתרון הלא סינגולרי מתקבל ע"י: $\int^x ....dt+\int^y ...du=c$.
לפתרונות אלה יש להוסיף את הפתרונות הסינגולריים $y(x)=y_0$ כאשר $Y_1(y_0)=0$.
דוגמא: נתונה המד"ר $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0$. המשתנים מופרדים: $\frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}=0$. ומכאן באינטגרציה: $\arctan x+\arctan y=c$.
דוגמא נוספת: פתרו: $(x+y)dy-ydx=0$.
נשים לב שזאת לא משווה פרידה, אולם אם נביע את x כפונקציה של y נקבל משוואה לינארית:
$(x+y)-y\frac{dx}{dy}=0$ כלומר $(x+y)-y\cdot x'=0$ נקבל $x'=\frac{1}{y}x+1$. שקול: $x'-\frac{1}{y}x=1$. נכפול את המשוואה ב$\frac{1}{y}=e^{-\ln y}=e^{\int -\frac{1}{y}}$ כל זאת בהנחה ש$y>0$. נקבל $\frac{1}{y}=\frac{d}{dy}(\frac{x}{y})$ ולכן $\frac{x}{y}=\ln(y)+c$ ולבסוף $x=y\ln y+cy$.
אם $y<0$ נכפול את המשוואה ב$\frac{1}{-y}=e^{-\ln(-y)}=e^{-\ln|y|}=e^{\int -\frac{1}{y}}$ וההמשך דומה.
בנוסף, קיים הפתרון הסינגולרי $y(x)=0$.

משוואה מדויקת

תהי $y(x)$ פונקציה המוגדרת בצורה סתומה ע"י המשוואה האלגברית:

$$(x+y)e^x+y^2=5$$

נגזור לפי x ונקבל: $(x+y+1)e^x+(e^x+2y)y'=0$.
המשוואה הנ"ל היא מד"ר מסדר ראשון, והמשוואה האלגברית שכתבנו היא פיתרונה. יתר על כן, פתרון כללי של המשוואה נתון ע"י: $(x+y)e^x+y^2=c$, כי הרי המד"ר שכתבנו אינו אלא המשוואה: $\frac{d}{dx}[(x+y)e^x+y^2]=0$.
באופן כללי, אם המשווא האלגברית $\phi(x,y)=c$ מגדירה את הפונקציה $y=y(x)$, אז מתקיים: $\phi(x,y(x))=c$, ואם נגזור לפי x נקבל: $\phi_x(x,y(x))+\phi_y(x,y(x))y'=0$. כלומר הפונקציה $y=y(x)$ היא פתרון של המד"ר $\phi_x(x,y)+\phi_y(x,y)=0$. אם נרשום את המשוואה בצורה סימטרית נוכל לסכם את הדיון כך: הפתרון הכללי של המשוואה $\phi_xdx+\phi_ydy=0$ נתון ע"י $\phi(x,y)=c$.

הגדרה 0.13 תהי נתונה משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון: $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$ כאשר הפונקציות X וY רציפות בתחום D ו$Y\neq 0$ בתחום זה. משוואה כזאת נקראת מדוייקת בD אם קיימת פונקציה של שני משתנים $\phi(x,y)$ גזירה בתחום זה, כך ש $\phi_x=X$, $\phi_y=Y$. הפונקציה ϕ נקראת פוטנציאל של המשוואה.

משפט 0.14 תהי $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$ משוואה מדויקת בתחום D ויהי ϕ פוטנציאל של המשוואה בתחום D. אזי הפתרון הכללי של המשוואה נתון ע"י $\phi(x,y)=C$.

הוכחה: יהי $y(x)$ פתרון של המשוואה. משוואה זו אינה אלא כתיב מוסכם של המשוואה $y'=-\frac{X}{Y}$. כלומר, $y'=-\frac{\phi_x}{\phi_y}$. נקבל: $\phi_x+\phi_y y'=0$. מכיוון שהנגזרות החלקיות של ϕ רציפות, נקבל (ממשפט) ש$\frac{d}{dx}\phi(x,y(x))=\phi_x+\phi_y y'$.
כלומר, הפתרון הוא $\phi(x,y(x))=c$. ■

דוגמאות:
1. $3x^2y^2dx+2x^3ydy=0$.
קל לראות שפונקציית הפוטנציאל היא $\phi(x,y)=x^3y^2$.
לכן הפתרון הוא $x^3y^2=c$.
2. $ydx+dy=0$.
משוואה זו איננה מדויקת. הסבר: אם קיים פוטנציאל ϕ אז ממשפט שלמדנו $\phi_{xy}=\phi_{yx}$. במקרה שלנו, $\phi_x=y$ ולכן $\phi_{xy}=1$. ואילו $\phi_y=1$ ולכן $\phi_{yx}=0$.
ניתן להסיק מכאן, שאם משוואה $Xdx+Ydy=0$ לא מקיימת $X_y=Y_x$, אז היא לא מדוייקת. (אנחנו מאפלים רק במשוואות בהן X וY גזירות ברציפות.)
למעשה, זהו גם תנאי מספיק.

משפט 0.15 תהי $Xdx+Ydy=0$ משוואה, אזר מקדמיה X וY הן פונקציות רציפות בעלי נגזרות חלקיות רציפות במלבן $D=\{(x,y)|\alpha<x<\beta,\gamma<y<\delta\}$. משוואה זו הינה מדוייקת בD אמ"מ $X_y=Y_x$ לכל $(x,y)\in D$.

הוכחה: הוכחנו כבר שהתנאי הכרחי. כעת נראה שהוא מספיק. נעשה זאת ע"י בניית פונקציית פוטנציאל. כלומר, אנחנו מחפשים פונקציה ϕ רציפה וגזירה בD כך ש $\phi_x=X$ ו$\phi=Y_y$.
נבחר y_0 כלשהו ונתבונן בקטע $I_{y_0}=\{(x,y)|\alpha<x<\beta,y=y_0\}$. בקטע זה הפונקציות ϕ וX תלויות במשתנה יחיד, x: $\phi=\phi(x,y_0),X=X(x,y_0)$. והנגזרת החלקית ϕ_x אינה אלה הנגזרת הרגילה: $\frac{d}{dx}\phi(x,y_0)$. לכן התנאי הראשון נותן לנו את המשוואה הדיפרנציאלית: $\frac{d}{dx}\phi(x,y_0)=X(x,y_0)$. הפונקציה $X(x,y_0)$ רציפה לכל x בקטע ולכן נקבל ע"י אינטגרציה: $\phi(x,y_0)=\int_{x_0}^x X(t,y_0)dt+C$. (עבור בחירה כלשהי של x_0). נוכל לחזור על תהליך זה לכל y בקטע (γ,δ), אלא שקבוע האינטגרציה אינו חייב להיות אותו ערך לכל y. כלומר, $C=C(y)$.
נסכם: לכל בחירה של פונקציה $C(y)$ של המשתנה y, הפונקציה $\phi(x,y)=\int_{x_0}^x X(t,y)dt+$ $C(y)$ מוגדרת בD וממלאת בו את התנאי הראשון.
נראה עתה, שניתן לבחור פונקציה $C(y)$ כך שהפונקציה ϕ הנ"ל תקיים גם את התנאי השני: $\phi_y=Y$. ראית, נשים לב שמאחר וX_y רציפה בD הרי שהפונקציה ϕ הנ"ל גזירה לפי y ומתקיים: $\phi_y(x,y)=\int_{x_0}^x X_y(t,y)dt+C'(y)$ (לפי משפט). ומכאן שהתנאי השני פירושו: $\int_{x_0}^x X_y(t,y)dt+C'(y)=Y(x,y)$. או: $C'(y)=Y-\int_{x_0}^x X_y dt$. אגף שמאל תלוי ב$y$ בלבד, לכן קיימת פונקציה כזאת אמ"ם אגף ימין תלוי בy בלבד. נוכיח שזה אכן המצב. לצורך כך נראה שהנגזרת לפי x שווה ל0. $\frac{d}{dx}[Y-\int_{x_0}^x X_y dt]=Y_x-X_y=0$.
כעת, נותר לפתור משוואת אינטגרציה פשוטה ולמצוא את C. ■

דוגמא: $(\sin y+\cos x)dx+(x\cos y+y)dy=0$. זאת משוואה מדוייקת, מכייון ש $X_y=\cos y=Y_x$. נמצא פוטנצאל.
$X=\sin y+\cos x$. $\phi=\int^x \sin y+\cos t dt+C(y)=x\sin y+\sin x+C(y)$.
כעת, $\frac{d}{dy}[x\sin y+\sin x+C(y)]=x\cos y+y$. לכן, $C'(y)=y$ ונקבל $C(y)=\frac{1}{2}y^2$.

תשובה סופית: $x\sin y+\sin x+\frac{1}{2}y^2=c$.

הערה: זה לא משנה אם מתחילים בX או בY. התהליך סימטרי. לפעמים יותר נח דווקא להתחיל בY.

דוגמא: פתור את המד"ר הבא: $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x)dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)dy=0$.קל לראות שזאת מד"ר מדוייקת. לחשב את האינטגרל של X לפי x יכול להיות מסובך. לכן, נחשב קודם את האינטגרל של Y לפי y.

$\phi=\int^y xe^{xt}\cos 2x-3dt+C(x)=e^{xy}\cos 2x-3y+C(x)$. כעת, $\frac{d}{dx}\phi=X$, ולכן $C'(x)=2x$. כלומר, $C(x)=x^2$. נקבל: $e^{xy}\cos 2x-3y+x^2=c$.

גורם אינטגרציה

המשוואה הדיפרנציאלית $(1+\frac{x}{x^2+y^2})dx+\frac{y}{x^2+y^2}dy=0$ היא משוואה מדוייקת. ככזו, אנו יודעים לפתור אותה. אם נכפיל את שני האגפים ב(x^2+y^2) נקבל את המשוואה: $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$. זאת לא משוואה מדוייקת, ולכאורה אנחנו לא יודעים איך לפתור אותה, אולם יש לה את אותם פתרונות כמו למשוואה המקורית. יוצא שאם נתחיל מהמשוואה השניה ונכפיל אותה ב$\frac{1}{x^2+y^2}$ נקבל משוואה מדוייקת, אותה נדע לפתור.

הגדרה 0.16 תהי נתונה המשוואה $Xdx+Ydy=0$ כאשר X וY פונקציות רציפות בעלות נגזרות חלקיות רציפות במלבן D, ו$Y\neq 0$ בD. פונקציה $\mu=\mu(x,y)$ גזירה ברציפות ושונה מ0 בD נקראת גורם אינטגרציה של המשוואה אם המשוואה: $(\mu X)dx+(\mu Y)dy=0$ היא מדוייקת.

דוגמא: נתונה המשוואה $ydx-xdy=0$. הוכח ש $\mu(x,y)=\frac{y}{x^3}$ הוא גורם אינטגרציה של המשוואה. הוכח שגם $\mu'(x,y)=\frac{1}{x^2}$ הוא גורם אינטגרציה של המשוואה.

מסקנה: למשוואה יכול להיות יותר מגורם אינטגרציה אחד.

למעשה, ניתן להוכיח שלכל משוואה קיים גורם אינטגרציה, אולם רוב הפעמים מציאת הגורם היא בעיה קשה (לפעמים אפילו יותר קשה מפתרון המד"ר בעצמו). נלמד כמה מקרים פרטיים שבהם ניתן לזהות את גורם האינטגרציה בקלות יחסית.

דוגמאות:

1. $ydx-xdy=0$. מזכיר את הביטוי לנגזרת של $\frac{x}{y}$. $d(\frac{x}{y})=\frac{ydx-xdy}{y^2}$. לכן נכפיל ב$\frac{1}{y^2}$. נקבל את המשוואה המדויקת: $\frac{dx}{y}-\frac{x}{y^2}dy=0$. אגף שמאל הוא הדיפרנציאל של $\frac{x}{y}$. ולכן משוואה היא $\frac{x}{y}=c$. (יש להוסיף גם את הפתרון הסינגולרי $y=0$).

2. $ydx+x(1+x^2y^2)dy=0$. מושכת את העין הקומבינציה $ydx+xdy=d(xy)$. לכן ניתן לרשום את המשוואה כך: $d(xy)+x^3y^2dy=0$. האיבר בראשון, אך לא השני,

הוא דיפרנציאל של פונקציה. אם נחלק את המשוואה בפונקציה כלשהי של (xy) האיבר הראשון עדיין יהיה דיפרנציאל של פונקציה. צריך לחלק בביטוי מתאים כך שגם האיבר השני יהפוך לנגזרת. לצורך כך נבחר את $(xy)^3$. נקבל: $\frac{d(xy)}{(xy)^3}+\frac{dy}{y}=0$.

כלומר $d(-\frac{1}{2}\frac{1}{(xy)^2}+\ln|y|)=0$. ולכן הפתרון הוא: $-\frac{1}{2(xy)^2}+\ln|y|=c$.

3. $y(x^3-y)dx-x(x^3+y)dy$.

נפתח את הסוגריים: $yx^3dx-y^2dy-x^4dy-xydy$. אנחנו מזהים $x^3(ydx-xdy)=x^3y^2d(\frac{x}{y})$ ו $-y(ydx+xdy)=-yd(xy)$. כלומר, ניתן לכתוב את המשוואה כך: $x^3y^2d(\frac{x}{y})-yd(xy)=0$. שני האיברים יהיו לדיפרנציאלים אם נכפיל ב $\frac{1}{x^2y^3}$.

כלומר: $\frac{x}{y}d(\frac{x}{y})-\frac{d(xy)}{xy}=0$ והפתרון: $\frac{1}{2}(\frac{x}{y})^2+\frac{1}{xy}=c$.

לפעמים ניתן למצוא גורם אינטגרציה התלוי במשתנה אחד. במקרה כזה יש אלגוריתם.

טענה 0.17 אם יש למשוואה הדיפרנציאלית $Xdx+Ydy=0$ יש גורם אינטגרציה התלוי רק בx או רק בy אז ניתן למצוא אותו ע"י פתירת משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית.

הסבר: μ הוא גורם אינטגרציה אמ"ם $(\mu X)_y=(\mu Y)_x$. כלומר: $X\mu_y+\mu X_y=\mu Y_x+Y\mu_x$. שקול: $Y\mu_x-X\mu_y=\mu(X_y-Y_x)$. אם יש גורם אינטגרציה $\mu=\mu(x)$ התלוי בx בלבד הרי ש $\mu_y=0$ ואילו μ_x הוא בסה"כ הנגזרת הרגילה. התנאי אם כן מתורגם כך: $Y(x,y)\mu'(x)=(X_y(x,y)-Y_x(x,y))\mu(x)$. או: $\mu'(x)-\frac{X_y-Y_x}{Y}\mu_x=0$. למשוואה זו יש פתרון אמ"ם הפונקציה $\frac{X_y-Y_x}{Y}$ תלויה בx בלבד.

תנאי מקביל מתקיים גם עבור גורם אינטגרציה בתלוי בy בלבד.

דוגמא: $(1+x^2+y^3)dx+5xy^2dy=0$.

$\frac{X_y-Y_x}{Y}=\frac{3y^2-5y^2}{5xy^2}=-\frac{2}{5x}$, פונקציה של x בלבד, ולכן יש למשוואה גורם אינטגרציה $\mu(x)$. הוא מקיים: $\mu'+\frac{2}{5x}\mu=0$. לכן $\mu=x^{-\frac{2}{5}}$. נכפול את המשוואה הנתונה בגורם זה: $(x^{\frac{8}{5}}+(1+y^3)x^{-\frac{2}{5}})dx+5y^2x^{\frac{3}{5}}dy=0$.

זוהי משוואה מדוייקת ופתרונה: $3x^2+13(1+y^3)=cx^{-\frac{3}{5}}$.

שיטות נוספות:

נתחיל בדוגמא. נסתכל על המשוואה הדיפרנציאלית הבאה: $(x^4+2x^2y+y^2+2x^2+2x)dx+(x+1)dy=0$.

לכאורה, אנחנו לא מכירים שום דרך לפתור אותה.

אולם, נשים לב שאם נציב $z=y+x^2$ אז $\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dx}+2x$. כלומר, $dz=dy+2xdx$ אז המשוואה הנתונה מיתרגמת ל- $z^2dx+(x+1)dz=0$. זאת משוואה פרידה. נרשום אותה

בצורה: $\frac{dz}{z^2}+\frac{dx}{x+1}=0$. ומכאן, $\ln|x+1|-\frac{1}{z}=c$. ולכן: $z(x)=\frac{1}{c+\ln|x+1|}$. יש להוסיף כמובן את הפתרון הסינגולרי $y(x)=0$.

לכן הפתרונות של המשוואה המקורית הן: $y(x)=\frac{1}{c+\ln|x+1|}-x^2$ ו$y(x)=-x^2$.

מאיפה הגענו לרעיון של ההצבה הזאת? מהתבוננות במשוואה כשהיא כתובה כך: $(x^2+y)^2dx+(x+1)(2xdx+dy)=0$.

בשיעור זה נלמד כמה הצבות מקובלות.

משוואת ברנולי

בשם זה קרויה משוואה מהצורה $y'+a(x)y=b(x)y^m$. עבור m קבוע כלשהו.

אם $m=1$ או $m=0$ זאת משוואה לינארית שאנחנו יודעים כבר לפתור. נניח כי $m\neq 1$. נחלק את שני אגפי המשוואה בy^m ונקבל: $y^{-m}y'+a(x)y^{1-m}=b(x)$.

נשים לב כי:. ולכן אם נציג פונקציה חדשה: $z=y^{1-m}$ נקבל: $z'+a(x)z=b(x)$ והגענו למשוואה לינארית.

במקרה ש$m>0$ יש לקחת בחשבון גם את הפתרון הסינגולרי $y(x)=0$ שהוחמץ כשחילקנו בy^m.

דוגמא: המשוואה $xy'4y=-6x^2y^2$ היא משוואת ברנולי עם $m=2$. יש לה פתרון סינגולרי $y=0$. כדי למצוא את שאר הפתרונות נחלק את המשוואה בy^2: $xy^{-2}y'-4y^{-1}=-6x^2$.

נציב $z=y^{1-2}=y^{-1}$. נקבל: $z'=-y^{-2}y'$. ולכן המשוואה היא: $z'+\frac{4}{x}z=6x$.

הפתרון הכללי של המשוואה הוא: $z=x^2+\frac{c}{x^4}$, ולכן הפתרון הכללי של המשוואה המקורית הוא: $y(x)=\frac{1}{z}=\frac{x^4}{x^6+c}$.

משוואות הומוגניות

סוג נוסף של משוואות שניתן לפתור באמצעות הצבה הוא משוואות הומוגניות. כלומר, משוואות בתבנית: $y'=f(\frac{y}{x})$. למשוואה הומוגנית מועילה ההצבה: $z=\frac{y}{x}$, הגוררת $y=zx$ ולכן $y'=z'x+z$. לכן המשוואה ההומוגנית תירשם בצורה הזאת: $z'x+z=f(z)$ או: $(f(z)-z)dx-xdz=0$. והגענו למשוואה נפרדה.

דוגמא: פתור את המשוואה: $y'=\frac{y^2-x^2}{2xy}$. פתרון: נשים לב שאגף ימין שווה ל: $\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$. כלומר, זוהי משוואה הומוגנית. נציב: $z=\frac{y}{x}$. כלומר, $y=zx$, $y'=z'x+z$ ונקבל: $z'x+z=\frac{z^2-1}{2z}$. או: $z'x+\frac{z^2+1}{2z}=0$. היינו: $xdz+\frac{z^2+1}{2z}dx=0$. נסדר ונקבל: $\frac{2z}{z^2+1}dz+\frac{1}{x}dx=0$. מכאן: $\ln(z^2+1)+\ln|x|=C$ והפתרון הכללי נתון ע"י: $(z^2+1)x=C$. נחזיר לפונקציה של y ונקבל סופית: $y^2=Cx-x^2$.

איך נדע מתי מד"ר היא הומוגנית?

הגדרה 0.18 משוואה $f(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר k אם לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים: $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^k f(x,y)$.

דוגמאות:

1. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$. אזי $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda x-\lambda y}{\lambda x+\lambda y}=\dfrac{x-y}{x+y}=\lambda^0 f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0.
2. $f(x,y)\dfrac{x^2+xy}{x-y}$. אזי, $f(\lambda x,\lambda y)=\dfrac{\lambda^2x^2+\lambda^2xy}{\lambda x-\lambda y}=\lambda f(x,y)$ הומוגנית מסדר 1.
3. $f(x,y)=x^2+y^2-xy$. וכו'...

טענה 0.19 $f(x,y)$ ניתנת לכתיבה בצורה $\phi(\frac{y}{x})$ אמ"ם היא הומוגנית מסדר 0.

הוכחה: אם $f(x,y)=\phi(\frac{y}{x})$ אז $f(\lambda x,\lambda y)=\phi(\frac{\lambda y}{\lambda x})=\phi(\frac{y}{x})=f(x,y)$.
צד שני: נציב $\lambda=\frac{1}{x}$. אז: $f(x,y)=f(\frac{1}{x}x,\frac{1}{x}y)=f(1,\frac{y}{x})=\phi(\frac{y}{x})$. ■

תרגיל: מצא הצבה שמעבירה משוואה שמבנה $y'=f(\alpha x+\beta y+\gamma)$ למשוואה נפרדה.
פתרון: ננסה את ההצבה הבאה: $z=\alpha x+\beta y+\gamma$. אז $z'=\alpha+\beta y'$. כלומר, נקבל: $\dfrac{z'-\alpha}{\beta}=f(z)$. $z'=\beta f(z)+\alpha=\tilde{f}(z)$. זאת משוואה נפרדה

דוגמא: פתור את המשוואה: $y'=(x+y)^2$.
פתרון: נציב: $z=x+y$. אז $z'=1+y'$ ונקבל את המשוואה: $z'=1+z^2$. שקול: $\dfrac{dz}{1+z^2}=dx$. והפתרון: $\arctan z=x+c$. נחזור להצבה: $\arctan(x+y)=x+c$. $x+y=\tan(x+c)$. כלומר: $y=\tan(x+c)-x$.

מד"ר מסדר שני

נתחיל בדוגמא. גוף בעל מסה m נופל מגובה מסויים על פני כדור הארץ. נתאר את מקומו של הגוף בפונקציה $h=h(t)$. מהירות הגוף היא $v(t)=h'$ ותאוצת הגוף היא $a(t)=v'=h''$. הכח היחיד הפועל הגוף הוא כח הכבידה: $-mg$(כי הכח פועל כלפי מטה). לכן מהחוק השני של ניוטון נקבל: $ma=mg$ כלומר $a=-g$ כלומר $h''=-g$. אנחנו רוצים לדעת את מיקום הגוף בכל רגע נתון. לצורך כך נפתור את המד"ר. $h'=-gt+c_1$. $h=-\frac{1}{2}gt^2+c_1x+c_2$. נשים לב שיש לנו כאן נעלמים, ובאמת בשביל לדעת את מיקום הגוף בכל רגע יש לדעת את הגובה ממנו הוא נפל, ובאיזו מהירות הוא התחיל ליפול.

דוגמא נוספת: גוף מחובר לקפיץ אופקי. ישנה נקודת שיווי משקל, שבה הגוף לא יזוז. אולם אנחנו יודעים שאם נמתח את הקפיץ או נכווץ אותו, הוא יפעיל כח על הגוף בכיוון מנוגד מהכיוון אליו הזזנו את הגוף. (אם מותחים קפיץ, הוא שואף להתכווץ בחזרה, וכן להפך). ידוע שהכח שהקפיץ מפעיל על הגוף פרופורציונלי למיקומו, ומנוגד לכיוון התנועה של הגוף. כלומר, מהחוק השני של ניוטון, אם נסמן בy את פונקציית המיקום של הגוף, אזי $-ky=F=ma=my''$. כאשר kהוא קבוע הקפיץ. קיבלנו את המשוואה: $my''+ky=0$. בהמשך נלמד איך לפתור משוואות מהצורה הזאת באופן כללי.

דוגמא נוספת: אנחנו מחפשים פתרון למשוואה: $y''-4y=0$.

לשם כך נעזר בטריק. נכתוב את המשוואה כך: $(y''-2y')+2(y'-2y)=0$. נכפיל בפונקציה השונה מ0: e^{-2x}. נקבל: $(y''-2y')e^{-2x}+2(y'-2y)e^{-2x}=0$. כל אחד משני המחוברים הוא הנגזרת הראשונה של פונקציה מתאימה:

$\left[y'e^{-2x}\right]' + \left[2ye^{-2x}\right]' = 0$. כלומר: $\left[(y'+2y)e^{-2x}\right]' = 0$. זה אומר ש: $(y'+2y)e^{-2x} = 4c_1$. שקול: $y'+2y = 4c_1e^{2xx}$. זאת משוואה לינארית מסדר ראשון. נפתור אותה כמו שלמדנו, בשיטת ההשלמה לנגזרת. נכפיל את המשוואה בe^{2x}: $(y'+2y)e^{2x} = 4c_1e^{4x}$. הווה אומר: $(ye^{2x})' = 4c_1e^{4x}$ ולאחר אינטגרציה נקבל: $ye^{2x} = c_1e^{4x}+c_2$. ולסיום: $y = c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$.

יחידות הפתרון קיבלנו פתרון כללי שתלוי בשני משתנים. במד"ר מסדר ראשון ראינו שאם נוסיף תנאי התחלה, נוכל לקבל פונקציה מפורשת. מכיוון שכעת יש שני משתנים, תנאי אחד לא יספיק, יש צורך בשני תנאים. אפשרות אחת היא להטיל שני "תנאי התחלה": על פונקציית הפתרון לשוות למספר נתון, ועל נגזרתה לשוות למספר נתון, עבור ערך מסויים של x.

דוגמאות:

1. $h''(t) = -g$. נניח כי נתונים הגובה ההתחלתי h_0 והמהירות ההתחלתית v_0 של הגוף בזמן t_0. דהיינו:

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h'(0) = 0 \end{cases}$$

נראה כי קיימת פונקציה אחת ויחידה מתוך האוסף שעונה על התנאים.

$h_0 = h(0) = c_2$.

$v_0 = h'(0) = c_1$.

ולכן הפתרון הוא $h(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$.

2. למשוואה $y'' - 4y = 0$ יש פתרון יחיד המקיים

$$\begin{cases} y(0) = 7 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

ואכן, אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל:

$$\begin{cases} 7 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 6 = y'(0) = 2c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

למערכת זו יש פתרון יחיד: $c_1 = 5, c_2 = 2$.

אפשרות נוספת היא מתן שני "תנאי שפה". כלומר, קביעת ערכיו של הפתרון בשתי נקודות שונותץ

דוגמא:

ממגדל שגובהו h_0 נזרקה בצורה אנכית אבן אשר פגעה בקרקע כעבור זמן T. מהו הגובה בו נמצאה האבן בזמן t כלשהו? $(0 \le t \le T)$.

תשובה: הפונקציה $h(t)$ מקיימת את המשוואה $h'' = -g$ שפתרונה הכללי הוא $h(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$.

מתנאי השאלה אנחנו לומדים כי:

$$\begin{cases} h(0) = h_0 \\ h(T) = 0 \end{cases}$$

הפתרון היחיד שמקיים את תנאי השפה הוא: $h(t) = h_0 + (\frac{1}{2}gT - \frac{h_0}{T})t - \frac{1}{2}gt^2$.
בקורס זה נעסוק בבעיות ערכים התחלתים בלבד.

כמו במקרה של משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, נעסוק גם כאן במשוואות בהן ניתן לחלץ את הנגזרת מהסדר הגבוה ביותר של הפונקציה הנעלמת. כלומר, ניתן להביא לצורה:

$$y' = f(x, y, y'')$$

הצגה זאת נקראת ההצגה הסטנדרטית. פונקציה $y = y(x)$ תיקרא פתרון של המשוואה בקטע I אם היא גזירה פעמיים בקטע והצבתה במשוואה מובילה לזהות.

הגדרה 0.20 בעיית ערכים התחלתיים מסדר שני היא משוואה דיפרנציאלית מסדר שני: $y'' = f(x, y, y')$ עם שני תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

כאשר x_0, y_0, y_1 הם מספרים נתונים כך שהנקודה (x_0, y_0, y_1) נמצאת בתחום ההגדרה של הפונקציה f.

משוואה חסרה

בסעיף זה נדון במשוואות מסדר שני שניתן לעשות להן רדוקציה למשוואות מסדר ראשון.

משוואה חסרה מטיפוס ראשון

זוהי משוואה מהצורה $y'' = f(x, y')$.
למשל: $y'' = \frac{1 - y'}{x}$.

רדוקציה למשוואה זו מיידית. נציג משתנה חדש: $z = y'(x)$ ובעזרתו נכתוב את המשוואה הנתונה כך: $z' = \frac{1 - z}{x}$. זוהי משוואה מסדר ראשון בפונקציה z. נוכל לפתור אותה בשיטת הפרדת המשתנים. נוסף על הפתרון הסינגולרי $z(x) = 1$, כל פתרונותיה מקיימים: $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{1 - z}$.. $-\ln|1 - z| = \ln|x| + c$. $z(x) = 1 + \frac{a}{x}$ כאשר a קבוע. שימו לב שקבוצת פתרונות זו מכילה גם את הפתרון הסינגולרי עבור $a = 0$. בשביל למצוא את y נציב: $y' = z = 1 + \frac{a}{x}$. ובאינטגרציה נקבל: $y = x + a \ln x + b$.

לסיכום: במשוואות מהצורה $y'' = f(x, y')$ נציב $z = y'$ ונקבל מד"ר מסדר ראשון: $z' = f(z, x)$.

הערה: ניתן להכליל את השיטה הזאת למד"ר מסדר n: $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$. מה נעשה? נציב: $z = y^{(n-1)}$. נקבל משוואה: $z' = f(x, z)$. זאת משוואה מסדר ראשון. אחרי שנפתור ונמצא את $z(x)$ נחלץ את y ע"י אינטגרציה $n - 1$ פעמים של z.

משוואה חסרה מטיפוס שני

זוהי משוואה בעלת הצורה $y''=f(y,y')$. לדוגמא: $y''=\frac{(y')^2}{y(y-1)}$.

גם כאן נציב: $z(x)=y'(x)$, ונרשום את המשוואה כך: $\frac{dz}{dx}=\frac{z^2}{y(y-1)}$ לכאורה לא השגנו דבר, שכן המשוואה האחרונה איננה משוואה דיפרנציאלית בפונקציה נעלמת $z(x)$. ניתן להתגבר על הבעיה אם נניח שהפתרון $y(x)$ מקיים בקטע בו הוא מוגדר $y'(x)\neq 0$. (אכן, אנחנו מאבדים חלק מהפתרונות). במקרה זה קיימת פונקציה הפוכה: $x=x(y)$, ולכן, אם נתייחס לy כאל המשתנה הבלתי תלוי במשוואה, נוכל לבטא את z כפונקציה של y. $z(x(y))$. על פי כלל השרשרת נקבל: $\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}$. ומאחר ש $x'(y)=\frac{1}{y'(x)}=\frac{1}{z}$ נקבל: $\frac{dz}{dx}=z\frac{dz}{dy}$.

הערה: כדאי להימנע משימוש ביותר מדי סימונים, אנחנו מתירים להשתמש באותה אות: z כדי לציין שתי פונקציות שונות: $z(x)$ ו$z(y)=z(x(y))$. כדי לבדוק אם הבנו את ההבחנה, נשתמש בדוגמא הבאה: אם $y(x)=x^3$, $z(x)=y'=3x^2$, מה מסמן $z(y)$?
פתרון: $z(y)=z(x(y))=3(\sqrt[3]{y})^2$. ולא לטעות ולחשוב ש$z(y)=3y^2$!

כעת, נמשיך בהצבות. המשוואה תיראה כך: $\frac{z^2}{y(y-1)}=z\frac{dz}{dy}$. זוהי משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון בפונקציה z, כאשר y הוא המשתנה הבת"ל. ע"י הפרדת משתנים נקבל: $\frac{dy}{y(y-1)}=\frac{dz}{z}$. ולכן: $\ln|z|=\ln|\frac{y-1}{y}|+c$. כלומר: $z=c_1\frac{y-1}{y}$ כאשר c_1 קבוע שרירותי. בזה נכלל גם הפתרון הסינגולרי $z=0$ (כאשר $c_1=0$). נזכר עתה כי $z=y'$ ונרשום את המשוואה האחרונה כך: $y'=c_1\frac{y-1}{y}$. זוהי שוב משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, ופתרונה הוא: $\frac{y}{y-1}dy=c_1dx$ לכן $y+\ln|y-1|=c_1x+c_2$ כאשר c_1 וc_2 קבועים שרירותיים.

לסיכום: הורדת סדר המשוואה $y''=f(y,y')$ לסדר נמוך יותר מושגת בהצבה $y'=z$ יחד עם היחס $y''=z\frac{dz}{dy}$. כך מועברת המשוואה הנתונה למשוואה מסדר ראשון: $z\frac{dz}{dy}=f(y,z)$. אם נצליח לפתור את המשוואה הזו, נקבל: $z=g(y)$ כלומר: $y'=g(y)$, וזאת משוואה נוספת מסדר ראשון.

לפעמים הפתרון $z(y)$ של "משוואת הביניים" $z\frac{dz}{dy}=f(y,z)$ מתקבל בצורה סתומה $\phi(y,z)=c$. אם נציב כאן $z=y'$ נקבל משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון $\phi(y,y')=c$ שאיננה רשומה בצורה הסטנדרטית. אולם לפעמים נצליח בכל זאת לחלץ את y' מן המשוואה.

דוגמא:

נתבונן במשוואה הבאה: $y''+\omega^2y=0$ כאשר $\omega>0$ קבוע נתון. זוהי משוואה חסרה מסוג שני, והיא בעלת חשיבות במכניקה. אם x מציין את הזמן וy מציין את הסחתה של מסה נקודתית מנקודה קבועה בכיוון מסויים, אז הנגזרת השניה, y'', היא תאוצת המסה בכיוון זה. משוואה זו איפוא מאפיינת חלקיק אשר תאוצתו פרופורציונית להסחתו ($y''=-\omega^2y$), וכיוונה הפוך מכיוון ההסחה. התנועה המתחייבת מתנאי זה נקראת "תנועה הרמונית". למשל, הכח הפועל על מסה m הקשורה לקפיץ נתון ע"י $F=-ky$ כאשר k קבוע הקפיץ וy הסחתה של המסה ממצב שיווי המשקל. עפ"י החוק השני של ניוטון מתקבל: $my''=-ky$ כלומר,

$y''+\omega^2y=0$ כאשר $\omega^2=\dfrac{k}{m}$.

נפתור את המשוואה עפ"י טכניקת המשוואות החסרות: נסמן $y'=z$, ונרשום את המשוואה כך: $z\dfrac{dy}{dz}+\omega^2y=0$. כלומר, $zdz+\omega^2ydy=0$. ובאינטגרציה נקבל: $z^2+\omega^2y^2=c_1$. כאשר c_1 קבוע שרירותי אי־שלילי. אם נציב $z=y'$ נקבל משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון: $(y')^2+\omega^2y^2=c_1$. נניח ש$c_1>0$. ע"י חילוץ של y' נקבל: $y'=\pm\sqrt{c_1-\omega^2y^2}$ ולכן המשוואה "מתפרקת" לשתי משוואות דיפרנציאליות הרשומות בצורה הסטנדרטית: $y'=\sqrt{c_1-\omega^2y^2}$ ו$y'=-\sqrt{c_1-\omega^2y^2}$. נפתור את המשוואה הראשונה: ע"י הפרדת משתנים נקבל $dx=\dfrac{dy}{\sqrt{c_1-\omega^2y^2}}$. ובאינטגרציה: $\dfrac{1}{\omega}\arcsin\dfrac{\omega^2}{\sqrt{c_1}}y=x+c_2$.
כלומר: $y=\dfrac{\sqrt{c_1}}{\omega^2}\sin(\omega x+\omega c_2)$. לכן קבוצת כל הפתרונות היא $y=\pm\dfrac{\sqrt{c_1}}{\omega^2}\sin(\omega x+\omega c_2)$ כאשר c_2 קבוע שרירותי וc_1 קבוע שרירותי אי שלילי. אפשר לרשום את זה גם כ: $y=\pm c_1\sin(\omega x+c_2)$

תרגיל: בנה אלגוריתם להורדת סדר של משוואה חסרה מסדר n: $y^{(n)}=f(y^{(n-2)},y^{(n-1)})$.

פתרון: נסמן: $u(x)=y^{(n-2)}$. נקבל: $u''=f(u,u')$ זאת משוואה חסדר מסדר שני מסוג שני, שאנחנו כבר יודעים לפתור.

פתור את המשוואה הבאה: $y'y'''=(y'')^2$.

פתרון: נציב $y'=u$. נקבל: $u''u=(u')^2$. נציב $z=u'$ ונתייחס אל z כפונקציה של u. נקבל: $z\dfrac{dz}{du}u=z^2$. $\dfrac{dz}{z}=\dfrac{du}{u}$. $\ln|z|=\ln|u|+c_1$. אזי $z=c_1'u$. נזכור כי $z=u'$. אז $u'=c_1u$. $u=c_2e^{c_1x}$. כלומר: $y'=c_2e^{c_1x}$. ולבסוף: ט

$$y=\begin{cases}\dfrac{c_2}{c_1}e^{c_1x}+c_3 & c_1\neq 0\\ c_2x+c_3 & c_1=0\end{cases}$$

לינאריות

הגדרה 0.21 משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר n היא משוואה מהצורה: $y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_1y'+p_0y=g(x)$
נוכל לרשום את המשוואה גם בצורה $y^{(n)}=f(x,y,y',...y^{(n-1)})$ כאשר $f=-p_0(x)y...-p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+g(x)$.

דוגמאות:

1. עבור $n=1$ משוואה לינארית נראית כך: $y'+p_0(x)y=g(x)$. זאת בדיוק משוואה לינארית מסדר ראשון.
2. המשוואה: $y''=x^4+x^2y-e^xy'$ היא משוואה לינארית מסדר שני.
3. המשוואה $y''=\sin y$ אינה לינארית.

אנו נתמקד כרגע במשוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר שני. בכתיב סטנדרטי תירשם משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני כך: $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$. משוואה כזו תיקרא הומוגנית אם $g(x)\equiv 0$.

משפט 0.22 תהי $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית. אז סכום של שני פתרונות של המשוואה הוא פתרון, וכפולה של הפתרון בקבוע הוא פתרון.

הוכחה: א. יהיו $y_1(x)$ ו$y_2(x)$ פתרונות של המשוואה. אז: $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$ וגם $y_2''+p(x)y_2'+q(x)y=0$. ע"י חיבור נקבל: $(y_1+y_2)''+p(x)(y_1+y_2)'+q(x)(y_1+y_2)=0$. כלומר, y_1+y_2 הוא פתרון.

ב. יהי $y(x)$ פתרון ויהי α מספר כלשהו. נכפול את השוויון: $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ בקבוע α. $\alpha y''+\alpha p(x)y'+\alpha q(x)y=0$. מכיוון ש$\alpha$ קבוע נוכל לרשום זאת גם כך: $(\alpha y)''+p(x)(\alpha y)'+q(x)(\alpha y)=0$ ומכאן שαy פתרון. ∎

נתבונן לדוגמא במשוואה $y''-4y=0$. ניתן לבדוק שהפונקציות $y_1=e^{2x}$ ו$y_2=e^{-2x}$ הן פתרונות. עפ"י המשפט לכל שני קבועים c_1 וc_2 גם c_1e^{2x} וc_2e^{-2x} הן פתרונות, ולכן גם סכומם: $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ הוא פתרון.

ואכן, בשיעורים הקודמים הוכחנו בעזרת מניפולציה מיוחדת כי זהו הפתרון הכללי של המשוואה.

הערה: הביטוי $c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$ נקרא הצירוף הלינארי של הפונקציות e^{2x} וe^{-2x}.

הגדרה 0.23 תהיינה $f_1(x),...,f_n(x)$ פונקציות נתונות המוגדרות בקטע משותף I. לכל n קבועים $c_1,...,c_n$, פונקציה f מהצורה $f(x)=\Sigma c_if_i$ נקראת צירוף לינארי של הפונקציות, והמספרים c_i נקראים מקדמי הצירוף.

ניסוח שקול למשפט: יהיו $y_1(x)$ ו$y_2(x)$ שני פתרונות של משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מסדר שני. אז כל צירוף לינארי שלהם הוא גם פתרון.

תרגיל: הראו שהפונקציות $y_1(x)=e^{2x}$ ו$y_2(x)=e^{-2x}$ הן פתרונות של המשוואה: $yy''+(y')^2-8y^2=0$. האם $c_1y_1(x)$ ו$c_2y_2(x)$ הם פתרונות? האם גם y_1+y_2 הוא פתרון?

תרגיל: תהי נתונה משוואה דיפרנציאלית לינארית אי־הומוגנית: $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$. הוכיחו שסכום של פתרונות אינו פתרון. הוכיחו שכפולה בסקלר ששונה מ1 של פתרון אינה פתרון.

מה כן אפשר להגיד על משוואות לינאריות אי־הומוגניות?

נתחיל בדוגמא: נסתכל על המשוואה $y''-4y=8x$. זוהי משוואה דיפרנציאלית לינארית אי־הומוגנית. אם נשמיט את האיבר האי־הומוגני נקבל את המשוואה ההומוגנית: $y''-4y=0$ שפתרונה הכללי כבר ידוע לנו.

נבדוק ש$y_p(x)=-2x$ הוא פתרון פרטי של המערכת. (בדיקה פשוטה).

האם יש פתרונות נוספים?

נניח ש$y(x)$ הוא פתרון נוסף. נתבונן בהפרש. $y_h=y-y_p$. פונקציה זו מקיימת: $y_h''-4y_h=...=0$. כלומר, y_h הוא פתרון של המערכת ההומוגנית. מכאן שהוכחנו: כל פתרון נוסף הוא מהצורה של סכום של פתרון פרטי ועוד פתרון של ההומוגנית. ניתן לבדוק שגם ההפך נכון. כלומר, כל פונקציה מהצורה הזאת היא פתרן של המערכת האי הומוגני.

זה מוביל אותנו למשפט הבא:

משפט 0.24 הפתרון הכללי של משוואה דיפרנציאלית לינארית אי־הומוגנית $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ הוא סכום של הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה ושל פתרון פרטי של המשוואה האי־הומוגנית.

הוכחה:...

דוגמא: נמצא את הפתרון הכללי של המשוואה האי־הומוגנית: $y''-4y=20\cos x$.

המשוואה ההומוגנית המתאימה היא: $y''-4y=0$ ופתרונה הכללי הוא $y_h(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$. לפתרון פרטי של המשוואה נגיע בדרך ניסוי. כיוון שבאגף ימין של המשוואה

רשומה הפונקציה $\cos x$ ונגזרתה השנייה גם היא $\cos x$, סביר להניח שקיים פתרון מהצורה $y_p(x) = \alpha \cos x$ עבור קבוע מתאים α. נמצא את α. $y' = (\alpha \cos x)' = -\alpha \sin x$. $y'' = (-\alpha \sin x)' = -\alpha \cos x$. מכאן: $y_p'' - 4y_p = -\alpha \cos x - 4\alpha \cos x = -5\alpha \cos x$. לכן $-5\alpha = 20$ ו-$\alpha = -4$. מסקנה: הפתרון הכללי של המשוואה הוא: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 4 \cos x$.

משפט 0.25 (משפט הקיום והיחידות) תהיינה $p(x), q(x)$ ו-$g(x)$ פונקציות רציפות בקטע פתוח I. תהי x_0 נקודה כלשהי ב-I ויהיו y_0, y_1 שני מספרים כלשהם. אז לבעיית הערכים ההתחלתיים: $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$.

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

קיים בקטע I פתרון יחיד.

תרגיל: מצאנו את הפתרון הכללי של המשוואה: $y'' - 4y = 8x$. מצאו פתרון פרטי המקיים: $\begin{cases} y(0) = 4 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$.

שאלה: האם קיימת משוואה דיפרנציאלית לינארית מסדר שני עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$ כך שהפונקציות $y_1 = x$ ו-$y_2 = \sin x$ הן פתרונות שלה?

תשובה: לא. נשים לב ששתי הפונקציות האלו מקיימות את התנאים: $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$, ולכן תהיה בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות.

כעת נצביע על הקשר שבין משוואות דיפרנציאליות לינאריות למרחבים וקטוריים.

נתבונן בשתי הקבוצות הבאות: $C(I)$= אוסף כל הפונקציות הרציפות בקטע I. $C^2(I)$= אוסף כל הפונקציות הרציפות ב-I, אשר גזירות פעמיים ב-I, ונגזרתן השניה רציפה ב-I.

קל לראותן ששתיהן מרחבים וקטוריים.

נתבונן במשוואה לינארית הומוגנית: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ אזר מקדמיה p, q הן פונקציות רציפות בקטע מסויים I, כלומר, $p, q \in C(I)$. פתרון של המשוואה הינה פונקציה גזירה פעמיים ב-I. יתרה מזאת, y'' רציפה ב-I הסבר: $y'' = -p(x)yy' - q(x)y$. מכיוון ש-y ו-y' גזירות אז הן רציפות. ולכן זוהי פונקציה רציפה כסכום ומכפלה של פונקציות רציפות.

נסמן ב-K את קבוצות הפתרונות של המשוואה. $K \subseteq C^2(I)$. בנוסף, ממה שכבר ראינו, K הינה תת מרחב וקטורי.

כעת, תהי $y(x)$ פונקציה כלשהי ב-$C^2(I)$. נתבונן בפונקציה: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)$. מאחר ש-$y''$ רציפה נובע שהפונקציה הנ"ל רציפה ב-I. מכאן שההעתקה L המתאימה לכל $y \in C^2(I)$ את הפונקצייה $L(y) = y'' + py' + qy$ היא העתקה מ-$C^2(I)$ ל-$C(I)$. נוכל לרשום את המשוואה הדיפרנציאלית כך: $L(y) = 0$.

מתברר ש-L היא העתקה לינארית. (הוכחה)

מכאן נקבל שאוסף הפתרונות של המשוואה הוא בדיוק $\ker L$.

מעכשיו, נוכל להשתמש בשיטות של אלגברה לינארית בשביל לפתור משוואות דיפרנציאליות לינאריות.

שאלה:

1. האם ההעתקה $L : C^2(I) \to C(I)$ היא על?

2. האם היא חח"ע?

תתשובה:

1. יהיו $p,q \in C(I)$ נתונים. ויהי $g \in C(I)$. השאלה היא בעצם האם קיים $y \in C^2(I)$ כך ש $L(y) = g$. שזה בדיוק שקול לשאלה האם יש פתרון למשוואה $y''+py'+qy = g$. ממשפט הקיום והיחידות, ידוע שתמיד יהיה פתרון. כלומר, ההעתקה על.

2. השאלה היא אם תמיד יהיה פתרון יחיד. ממשפט הקיום והיחידות, התשובה היא לא (למרות השם המבלבל). המשפט אומר שלכל תנאי התחלה שנשים יהיה פתרון שמקיים אותם. אז אם נשים תנאי התחלה מנוגדים (למשל $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ ותנאי שני: $\begin{cases} y(x_0) = y_0' \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$ עבור $y_0 \neq y_0'$, נקבל פתרונות שונים.

משוואות דיפרנציאליות לינאריות הומוגניות מסדר שני

המטרה שלנו היא לחקור את מרחב הפתרונות של משוואה כזאת, וביתר פירוט, להוכיח שזהו מרחב ממימד 2, לאפיין את הבסיסים שלו, וללמוד איך ניתן למצוא בסיס במקרים מסויימים.

תלות לינארית של פונקציות

שתי הפונקציות:

$$f_1(x) = 3e^{2x}$$

$$f_2(x) = 5e^{2x}$$

שונות זו מזו בכל נקודה, אך שורר בינהן קשר לינארי־ צירוף לינארי שלהן מתאפס על כל הישר: $5f_1 - 3f_2 = 0$.

לעומתן, לצמד פונקציות אחר:

$$f_1(x) = e^{2x}$$

$$f_2(x) = e^{-2x}$$

אין באף קטע יחס לינארי המקשר בינהן. כלומר, לא קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי (שלא כל מקדמיו אפסים) $c_1f_1 + c_2f_2$ המתאפס בקטע כלשהו.

נוכיח את הטענה האחרונה:

נניח שצירוף לינארי של הפונקציות f_1 וf_2 מתאפס בקטע I, כלומר לכל $x \in I$ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x) = 0$. דהיינו: $c_1e^{2x}+c_2e^{-2x} = 0$. נכפול את השוויון האחרון בe^{2x}. $c_1e^{4x}+c_2 = 0$. $e^{4x} = -\dfrac{c_2}{c_1}$ עבור $c_1 \neq 0$. שוויון זה יכול להתקיים רק עבור x אחד, כי e^{4x} היא פנקציה חח"ע. אם $c_1 = 0$ אז $c_2e^{-2x} = 0$ כלומר $e^{-2x} = 0$. וגם שוויון זה יכול להתקיים רק עבור x אחד (כי e^{2x} חח"ע) אא"כ $c_2 = 0$. קיבלנו שהצירוף המתאפס היחיד הוא הטריוויאלי.

דוגמא נוספת: נתבונן בצמד הפונקציות הבא:

$$f_1(x) = e^{2x}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x+1 & -\infty < x << \leq 0 \\ e^{2x} & 0 < x < \infty \end{cases}$$

האם יש קשר לינארי בין הפונקציות?

הדבר תלוי בתחום המשתנה x. בתחום $x > 0$ יש קשר כזה: $1 \cdot f_1(x) - 1 \cdot f_2(x) = 0$. לעומת זאת, בתחום $-1 < x < 1$ למשל אין אף צירוף לינארי מתאפס לא טריוויאלי. הוכחה: נניח $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ לכל x בתחום. בפרט, עבור $x = 0$ השוויון מתקיים. כלומר, $c_1 f_1(0) + c_2 f_2(0) = 0$ שזה בעצם $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 = 0$. זה אומר ש$c_1 + c_2 = 0$. מצד שני, השוויון מתקיים גם ל$x = -\frac{1}{2}$. $c_1 f_1(-\frac{1}{2}) + c_2 f_2(-\frac{1}{2}) = 0$ כלומר $c_1 e^{-1} + 0 = 0$. לכן $c_1 = 0$ וזה גורר $c_2 = 0$.

הגדרה 0.26 שתי הפונקציות $f_1(x)$ ו$f_2(x)$ המוגדרות באותו קטע I נקראות "תלויות לינארית" בקטע זה אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי שלהן המתאפס בכל הקטע. אחרת, נגיד שהן בת"ל (בלתי תלויות)

לדוגמא: הפונקציות e^{2x} וe^{-2x} הן בת"ל.
דוגמאות נוספות:

1. הפונקציות x^2 ו$\cos x$בת"ל בקטע $[0, 0.1]$. הסבר: אם $c_1 x^2 + c_2 \cos x = 0$ לכל $0 \leq x \leq 0.1$ מתחייב, למשל מהצבת $x = 0$ ש$c_2 = 0$ ולכן גם $x_1 = 0$.
2. הפונקציות $\sin 2x$ ו$\sin x \cos x$ תלויות לינארית על כל הישר, כיוון שלכל x: $1 \cdot \sin 2x - 2 \sin x \cos x = 0$.
3. הפונקציות $e^{\alpha x}$ ו$e^{\beta x}$ לכל $\alpha \neq \beta$ בת"ל בכל קטע.

נכליל את ההגדרה:

הגדרה 0.27 קבוצה של n פונקציות המוגדרות בקטע I נקראת קבוצה תלויה לינארית בקטע I אם קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי של הפונקציות המתאפס בכל הקטע.
דוגמאות:

1. קבוצת הפונקציות $\{1, x, x^2, x^3\}$ בת"ל בכל קטע. הוכחה: נניח ש $c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 = 0$ לכל x בקטע. אגף שמאל של המשוואה הוא פוליום במשתנה x. פרט לפולינום האפס, לכל פולינום יש מס' סופי של שורשים, במקרה שלנו כל המספרים בקטע הם שורשים, לכן זהו פולינום האפס. כלומר, כל המקדמים הם 0.
2. הפונקציות $\sin x, \cos x, 2\sin x + \cos x$ תלויות לינארית בכל קטע, כי $2\sin x + \cos x - (2\sin x + \cos x) = 0$ זהותית.

בהינתן מספר פונקציות לא תמיד קל לבדוק ישירות על פי הגדרה אם הן תלויות לינארית. למשל, ייתכן שבמבט ראשון לא תוכלו להכריע בשאלה האם ארבעת הפונקציות:

$$f_1 = e^x + 2\sin x$$

$$f_2 = e^{-x} + \cos x$$

$$f_3 = e^x + e^{-x}$$

$$f_4 = 2\sin x + 2\cos x$$

תלויות לינארית. (התשובה היא כן. $f_1 + 2f_2 - f_3 - f_4 = 0$)

וורונסקיאן

נדגים כאן דרך אחת להוכחת אי תלות של הפונקציות: $f_1 = e^x$ ו$f_2 = x$ בקטע $(0,1)$.

נתבונן בצירוף הלינארי המתאפס: $c_1e^x + c_2x = 0$ ונוכיח שהקבועים חייבים להיות אפס. נגזור את המשוואה לפי x ונקבל: $c_1e^x + c_2 = 0$. המשוואות מהוות שני תנאים על הקבועים c_1 וc_2. נחסר בין המשוואות ונקבל $c_2(x-1) = 0$. משוואה זו גוררת בהכרח $c_2 = 0$, ולכן נובע מיידית ש$c_1 = 0$.

נרשום שוב את שתי המשוואות זו תחת זו.

$$\begin{cases} c_1e^x + c_2x = 0 \\ c_1e^x + c_2 = 0 \end{cases}$$

לכל x בקטע $(0,1)$ מהווה המערכת מערכת של שתי משוואות אלגבריות לינאריות הומוגניות בנעלמים c_1 וc_2. יש למערכת פתרון לא טריוויאלי אמ"ם דטרמיננטת המקדמים שווה 0. לכל x בקטע דטרמיננטת המקדמים היא: $\left|\begin{pmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix}\right| = e^x(1-x)$ לכלל $x \in (0,1)$ הדטרמיננטה שונה מ0. ולכן למערכת יש פתרון יחיד: $c_1 = c_2 = 0$.

הגדרה 0.28 תהיינה f_1 וf_2 פונקציות גזירות בקטע I. הפונקציה $W(x) = \left|\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}\right|$ נקראת הוורונסקיאן של הפונקציות. לפעמים נסמן $W(f_1, f_2; x)$.

תרגיל: חשב את הוורונסקיאן של הפונקציות: $\sin ax$ ו$\cos bx$.

פתרון: $W(x) = \left|\begin{pmatrix} \sin ax & \cos bx \\ a\cos ax & -b\sin bx \end{pmatrix}\right| = -b\sin ax\sin bx - a\cos ax\cos bx$.

כפי שראינו לוורונסקיאן יש תפקיד בקביעת תלות או אי תלות של פונקציות.

משפט 0.29 תהיינה f_1 וf_2 פונקציות גזירות התלויות לינארית בקטע I. אזי הוורונסקיאן שלהן מתאפס בכל נקודה בקטע.

הוכחה: אם f_1 וf_2 תלויות לינארית בקטע I אז קיימים קבועים c_1, c_2 לא שניהם 0 כך ש$c_1f_1 + c_2f_2 = 0$ לכל x בקטע. הפונקציות גזירות, לכן נגזור את השוויון: $c_1f_1' + c_2f_2' = 0$ לכל x בקטע. תהי x_0 נקודה כלשהי בI.נרשום עבורה את המשוואות:

$$\begin{cases} c_1f_1(x_0) + c_2f_2(x_0) = 0 \\ c_1f_1'(x_0) + c_2f_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

זאת מערכת משוואות אלגבריות לינאריות הומוגניות בנעלמים c_1 וc_2.

לפי הנתון קיימים קבועים c_1, c_2 לא שניהם 0 שמקיימים את המערכת. במילים אחרות, קיים למערכת פתרון לא טריוויאלי, ולכן הדטרמיננטה חייבת להתאפס. נשים לב שהדטרמיננטה היא בדיוק $W(x_0)$. מכאן, שלכל נקודה בI הוורונסקיאן שווה 0. מש"ל.

■

מסקנה: אם הוורונסקיאן של שתי פונקציות גזירות שונה מ0 בנקודה x_0 אז הפונקציות בלתי תלויות בכל קטע המכיל את הנקודה.

דוגמאות:

1. $f_1 = \cos x$, $f_2 = \sin x$. אז: $W(x) = \left|\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\right| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. $W \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכן הפונקציות בלתי תלויות בכל קטע.

2. e^x ו$\sin x$. $W(x) = \left|\begin{pmatrix} e^x & \sin x \\ e^x & \cos x \end{pmatrix} = e^x(\cos x - \sin x)\right|$. $W(x)$ אומנם מתאפס בנקודות מסויימות $(x = \frac{\pi}{4} + \pi k)$ אבל בכל קטע יש נקודה בה $W(x) \neq 0$. לכן הפונקציות בלתי תלויות בכל קטע.

3. לגבי שתי הפונקציות $f_1 = x^2$ ו$f_2 = 5x^2$ הוורונסקיאן הוא: $W(x) = \left|\begin{pmatrix} x^2 & 5x^2 \\ 2x & 10x \end{pmatrix}\right| = 10x^3 - 10x^3 = 0$. כלומר, הוורונסקיאן שווה ל0 בכל נקודה על הישר. שימו לב שזה עדיין לא גורר שהפונקציות תלויות. אולם קל לראות ש $5f_1 - f_2 = 0$.

התאפסות הוורונסקיאן היא תנאי הכרחי לתלות לינארית של פונקציות, אך היא לא תנאי מספיק. נדגים זאת באמצעות הדוגמא הבאה:

דוגמא:

נסתכל עדל שתי הפונקציות המוגדרות בקטע $[-1, 1]$ בצורה הבאה:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

הפונקציות גזירות בכל הקטע ונגזרותיהן הן:

$$f_1' = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f_2' = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

הוורונסקיאן הוא:

$$W(x) = \left|\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{pmatrix}\right| = f_1f_2' - f_2f_1'$$

לכל $x \geq 0$: $W(x) = x^2 \cdot 0 - 0 \cdot 2x = 0$
לכל $x < 0$: $W(x) = 0 \cdot 2x - x^2 \cdot 0$

כלומר, הוורונסקיאן מתאפס בכל הקטע $[-1,1]$. כעת, נוכיח שלמרות זאת הפונקציות בלתי תלויות.

נניח שקיימים c_1, c_2 לא שניהם 0 כך שלכל $x \in [-1,1]$: $c_1f_1 + c_2f_2 = 0$. אם נציב את הנקודה $x = 1$ נקבל $c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$ ולכן $c_1 = 0$. ואם נציב את הנקודה $x = -1$ נקבל $c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0$ ולכן $c_2 = 0$.

נכליל את הדיון למספר רב יותר של פונקציות:

הגדרה 0.30 תהיינה $f_1, ..., f_n$ פונקציות בעלות כל הנגזרות עד הסדר ה$(n-1)$ בקטע I. הוורונסקיאן של n הפונקציות הוא הדטרמיננטה הבאה:

$$W(x) = \left|\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\right|$$

לדוגמא: חשב את הוורונסקיאן של ארבע הפונקציות: $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2, f_4 = x^3$
פתרון:

$$W(x) = \left|\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right| = 12$$

משפט 0.31 תהיינה $f_1, ..., f_n$ פונקציות בעלות נגזרות עד הסדר ה$(n-1)$ בקטע I. אם הפונקציות תלויות לינארית בקטע, אז הוורונסקיאן שלהן מתאפס.

מסקנה: יהיו $f_1, ..., f_n$ פונקציות גזירות עד הסדר ה$(n-1)$ בנקודה x_0 כך שהוורונסקיאן שלהן שונה מ0 בנקודה x_0, אז הפונקציות בלתי תלויות בכל קטע המכיל את הנקודה.

לדוגמא: $1, x, x^2, x^3$ בלתי תלויות בכל קטע.

מרחב הפתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני

לשם נוחיות, נזכיר כמה מהתכונות של משוואות כאלו.

למה 0.32 תהי נתונה משוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ עם מקדמים רציפים בקטע פתוח I.

א. יש למשוואה פתרון בקטע I: הפתרון $y(x)=0$

ב. כל צירוף לינארי של פתרונות גם הוא פתרון.

ג. הפתרון היחיד המקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה: $\begin{cases} y(x_0)=0 \\ y'(x_0)=0 \end{cases}$ הוא הפתרון הטריוויאלי.

הוכחה: א. מיידי

ב. הוכחנו.

ג. נובע ממשפט הקיום והיחידות. ■

נשימו לב, תכונה ג' מאפשרת לנו לפעמים להוכיח שפונקציה מסויימת מתאפסת בקטע. לצורך כך, נמצא נקודה בקטע שבה הפונקציה ונגזרתה שוות 0. ולאחר מכן ננסה לבנות מד"ר לינארית הומוגנית עם מקדמים רציפים שפונקציה זו היא פתרון שלה.

דוגמא: נתון כי זווית ϕ מקיימת את שני התנאים:

$$\begin{cases} \sin\phi+\sin 2\phi+...+\sin n\phi=0 \\ \cos\phi+\cos 2\phi+...+\cos n\phi=0 \end{cases}$$

הוכח כי לכל x, $\sin(x+\phi)+\sin(x+2\phi)+...+\sin(x+n\phi)=0$

תשובה: נתבונן בפונקציה $y(x)=\sin(x+\phi)+...+\sin(x+n\phi)$

$y(x)$ גזירה (אינסוף פעמים) ומתקיים: $y'(x)=\cos(x+\phi)+...+\cos(x+n\phi)$.

על פי הנתון, $y(0)=y'(0)=0$.

נחשב את y'': $y''=\sin(x+\phi)-...-\sin(x+n\phi)$.

לכן y מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית הלינארית ההומוגנית הבאה: $y''+y=0$.

ומכיוון ש-$y(0)=y'(0)=0$ אז על פי תכונה ג' $y(x)=0$ לכל x.

בסעיף הקודם הודגש שהתאפסות הוורונסקיאן היא תנאי הכרחי אך לא מספיק לתלות לינארית בין שתי פונקציות. כעת נראה שהתנאי הזה מספיק כשמדובר על שתי פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית.

משפט 0.33 יהיו y_1,y_2 שני פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע פתוח I. תהי x_0 נקודה בקטע זה. אם הוורונסקיאן של y_1 ו-y_2 מתאפס בנקודה x_0 אז y_1 ו-y_2 תלויים לינארית בקטע (וממילא הוורונסקיאן שלהם מתאפס בכל הקטע)

הוכחה: ההוכחה תתבסס על הטכניקה הבאה: נבנה פונקציה שהיא צירוף לינארי לא טריוויאלי של y_1 ו-y_2 (וממילא היא תפתור את המשוואה) ואשר היא ונגזרתה מתאפסות ב-x_0. מכאן נסיק שהיא מתאפסת בכל הקטע, וזה אומר תלות לינארית של y_1 ו-y_2.

ובכן, נחפש את $y(x)$ בצורה: $y(x)=c_1y_1+c_2y_2$. פונקציה זו תקיים: $y(x_0)=y'(x_0)=0$.

אם נדרוש:

$$\begin{cases} y(x_0)=c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=0 \\ y'(x_0)=c_1y_1'(x_0)+c_2y_2'(x_0)=0 \end{cases}$$

לפנינו מערכת של שתי משוואות לינאריות בנעלמים c_1 וc_2. הדטרמיננטה של המערכת היא:
$\left|\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}\right| = W(y_1, y_2; x_0)$.

לפי הנתון $W(x_0) = 0$ ולכן יש למערכת פתרון לא טריוויאלי. נסמן אותו בd_1, d_2.
כלומר, הפונקציה $y(x) = d_1y_1 + d_2y_2$ היא צירוף לינארי לא טריוויאלי של y_1 וy_2 והיא מקיימת: ■

1. $y(x_0) = y'(x_0) = 0$
2. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

ולכן $y(x) \equiv 0$. כלומר, y_1 וy_2 תלויים לינארית בקטע I.

מסקנה: יהיו y_1 וy_2 שני פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע I, אז הוורונסקיאן מתאפס זהותית בI או שאינו מתאפס באף נקודה בקטע.
דוגמאות:

1. נתבונן במשוואה $y'' - 4y = 0$. ראינו שהפונקציות $y_1 = e^{2x}$ ו$y_2 = e^{-2x}$ הן פתרונות למשוואה. הוורונסקיאן שלהן הוא: $\left|\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{x} & -2e^{2x} \end{pmatrix}\right| = -4$ פונקציה זו שונה מאפס בכל קטע.

2. הוורונסקיאן של הפונקציות $y_1 = x$ ו$y_2 = x^2$ הוא: $\left|\begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}\right| = x^2$ הוא מתאפס בנקודה 0 ושונה מאפס בכל נקודה אחרת. הווה אומר־ בכל קטע I אשר מכיל את הנקודה $x = 0$ הוורונסקיאן מתאפס בנקודה אחת אך אינו מתאפס זהותית. לכן אין מד"ר לינארית הומוגנית אשר מקדמיה רציפים בסביבת הנקודה $x = 0$ וושתי הפונקציות האלה הם פתרונות שלה.

משפט 0.34 (בוחן לאי תלות לינארית של פתרונות). יהיו y_1 וy_2 שני פתרונות של משוואה: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ עם מקדמים רציפים בקטע I.

א. אם y_1 וy_2 בלתי תלויים בI, אז הוורונסקיאן שלהם שונה מ0 בכל נקודה בקטע.
ב. אם הוורונסקיאן שונה מ0 בנקודה כלשהי בI אז הפתרונות הם בלתי תלויים.

דוגמא: בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $\frac{1}{x}$ ו$\frac{1}{x}\ln x$ הן פתרונות של המשוואה: $y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$ בקטע $x > 0$. כדי לקבוע אם הפונקציות תלויות לינארית על הקרן החיובית די להראות שהוורונסקיאן שלהן שונה מ0 בנקודה אחת כלשהי בקרן הזאת. הוורונסקיאן הוא: $W(x) = \left|\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x}\ln x \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{1}{x^2}(1-\ln x) \end{pmatrix}\right|$ ערכו של W בנקודה $x = 1$ הוא: $W(1) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0$ ומכאן שהפונקציות בת"ל בקטע.
הגענו לגולת הכותרת של הנושא:

משפט 0.35 תהי נתונה משוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ בעלת מקדמים רציפים בקטע פתוח I. אז:

א. יש למשוואה שני פתרונות בלתי תלויים לינארית בI.

ב. אם y_1 וy_2 הם שני פתרונות בלתי תלויים של המשוואה, אז הפתרון הכללי הוא: $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$.

הוכחה: א. על פי משפט הקיום והיחידות יש פתרון למשוואה עבור כל תנאי התחלה. תהי $x_0 \in I$ נקודה כלשהי. יהי y_1 פתרון המקיים את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases}$$

וy_2 פתרון המקיים את תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

שני הפתרונות הם בלתי תלויים בקטע I. נראה זאת באמצעות הוורונסקיאן: $W(x_0) = \left|\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 1 \neq 0$. כזכור, אם יש נקודה אחת שבה הוורונסקיאן שונה מ0, הפונקציות בת"ל.

ב. יהיו y_1, y_2 שני פתרונות בת"ל של המשוואה. ידוע שכל צירוף לינארי שלהם $y(x) = c_1y_1 + c_2y_2$ הוא גם פתרון. נשאר לנו להוכיח שכל פתרון הוא מהצורה הזאת. ■

ובכן, יהי $y(x)$ פתרון כלשהו של המשוואה. נבחר נקודה כלשהי x_0 בקטע I ונתבונן במערכת משוואות אלגבריות בנעלמים c_1 וc_2:

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y(x_0) \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

הוכחה: דטרמיננטת המקדמים של מערכת זו היא: $\left|\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}\right|$ וזה בדיוק $W(x_0)$. על פי הנתון y_1 וy_2 הם בת"ל ולכן הוורונסקיאן שלהם שונה מ0 בכל נקודה בI. זה אומר ש $W(x_0) \neq 0$, ולכן יש למערכת פתרון. נסמנו ב(d_1, d_2) ונתבונן בפונקציה $z(x) = d_1y_1 + d_2y_2$. ברור שהיא פתרון של המשוואה. לפי הבניה $z(x_0) = y(x_0)$ וגם $z'(x_0) = y'(x_0)$ ולכן ממשפט הקיום והיחידות $z = y$ על כל הקטע I. כלומר, y הוא צירוף לינארי של y_1 וy_2. ■

הגדרה 0.36 מערכת של שני פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה ההומוגנית בקטע I נקראת מערכת בסיסית של פתרונות.

דוגמא: נפתור את המשוואה $y'' + \omega^2 y = 0$ עבור $\omega > 0$. למשוואה זו ידועים שני פתרונות (בהמשך נלמד איך למצוא אותם): $y_1(x) = \cos\omega x$ ו$y_2(x) = \sin(\omega x)$. הוורונסקיאן של הפתרונות הוא: $W(x) = \left|\begin{pmatrix} \cos(\omega x) & \sin(\omega x) \\ -\omega\sin(\omega x) & \omega\cos(\omega x) \end{pmatrix}\right| = \omega(\cos^2(\omega x)+\sin^2(\omega x)) = \omega \neq 0$ ולכן הפתרון הכללי הוא: $y(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$.

שיטות פתרון למשוואות לינאריות מסדר שני

משוואה הומוגנית שמקדמיה קבועים

משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים נראית כך: $ay''+by'+cy=0$ $(a\neq 0)$

המשוואה אומרת לנו שקיים קשר לינארי בין פונקציית הפתרון לנגזרותיה. אחת הפונקציות המוכרות לנו שמקיימות זאת היא הפונקציה המעריכית: $y(x)=e^{\lambda x}$. פונקציה זו מקיימת: $y'=\lambda e^{\lambda x}$ ו-$y''=\lambda^2e^{\lambda x}$. נציב זאת במשוואה ונקבל: $a\lambda^2e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0$ כלומר: $(a\lambda^2+b\lambda+c)e^{\lambda x}=0$ שזה שקול לכך ש: $a\lambda^2+b\lambda+c=0$. כלומר, λ הוא שורש של הפולינום ax^2+bx+c. משוואה זו נקראת המשוואה האופיינית של המד"ר המתאים.

האם יש למשוואה שורש? במרוכבים יש שורש לכל פולינום. אופיו של השורש תלוי בסימנה של הדיסקרימיננטה. נפרט את האפשרויות:

1. $b^2-4ac>0$. במקרה זה יש למשוואה שני פתרונות ממשיים שונים λ_1,λ_2. ממילא קיימים למד"ר שני פתרונות: $y_1=e^{\lambda_1 x}$ ו-$y_2=e^{\lambda_2 x}$. כדי להיווכח באי תלותם נשתמש בוורונסקיאן. $W(x)=\left|\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x}\end{pmatrix}\right|=(\lambda_2-\lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}$
מכיוון ש-$\lambda_1\neq\lambda_2$ אזי $W(x)\neq 0$. כלומר, y_1 ו-y_2 בלתי תלויים, וממילא הפתרון הכללי הוא: $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$.
דוגמא: נפתור את המשוואה $2y''-y'-y=0$. זוהי משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים. המשוואה האופיינית שלה היא: $2x^2-x-1=0$. למשוואה זו שני שורשים ממשיים שונים: $\lambda_1=1$ ו-$\lambda_2=-\dfrac{1}{2}$. לכן יש שני פתרונות בת"ל: e^x ו-$e^{-\frac{1}{2}}$,
ולכן הפתרון הכללי הוא: $y=c_1e^x+c_2e^{-\frac{1}{2}}$.

2. $b^2-4ac<0$. במקרה זה יש למשוואה שני שורשים מרוכבים צמודים זה לזה: $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$, ומיד מתעוררת השאלה מה פירוש $e^{\lambda x}$ כש-λ מספר מרוכב.
בשביל להשיב על שאלה זות נסטה מהדיון ונדון בפונקציות מרוכבות $f(x)$ של משתנה ממשי x, כלומר בפונקציות בעלות הצורה $f(x)=u(x)+iv(x)$ כאשר $u(x)$ ו-$v(x)$ פונקציות ממשיות המוגדרות בקטע מסויים, I. הפונקציה $u(x)$ נקראת החלק הממשי של $f(x)$ והפונקציה $v(x)$ נקראת החלק המדומה של $f(x)$. ($Re(f(x))$ ו-$Im(f(x))$).
טענה: אם הפונקציות $u(x)$ ו-$v(x)$ גזירות נאמר ש-$f=u+iv$ גזירה, ונגזרתה היא: $f'=u'+iv'$.
דוגמאות:
נתבונן בפונקציה: $f(x)=\cos\beta x+i\sin\beta x$ (β מספר ממשי נתון). הפונקציות $\cos\beta x$ ו-$\sin\beta x$ גזירות ולכן f גזירה, ונגזרתה היא: $f'=(\cos\beta x)'+i(\sin\beta x)'=-\beta\sin\beta x+i\beta\cos\beta x=i\beta(\cos\beta x+i\sin\beta x)$.
הווה אומר: $f'=i\beta f$. כלומר, הנגזרת של הפונקציה היא כפולה של הפונקציה. נביא דוגמא כללית יותר לפונקציות כאלה:
נתבונן בפונקציה: $f(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$ (כאשר α ו-β מספרים ממשיים נתונים). נחשב את הנגזרת:
$f'(x)=(\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x-\beta e^{\alpha x}\sin\beta x)+i(\alpha e^{\alpha x}\sin\beta x+\beta e^{\alpha x}\cos\beta x)=(\alpha+i\beta)e^{\alpha x}\cos\beta x+i(\alpha+i\beta)e^{\alpha x}\sin\beta x=(\alpha+i\beta)(e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x)=(\alpha+i\beta)f(x)$. כלומר, $f'=(\alpha+i\beta f)$.

בתורת המשוואות מסדר ראשון למדנו שהפונקציה הממשית היחידה הפותרת את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

היא הפונקציה $y = e^{\lambda x}$. כלומר, שתי המשוואות שלעיל מאפיינות את $e^{\lambda x}$. הפונקציה המרוכבת האחרונה מקיימת אף היא $f' = \lambda f$ (עבור $\lambda = \alpha + i\beta$) ובנוסף לכך $f(0) = 1 + 0i = 1$. אם כן, טבעי להגדיר את הפונקציה המעריכית $e^{(\alpha+i\beta)x}$ ע"י הנוסחא הזו. וכך אכן נעשה.

הגדרה 0.37 יהי $\lambda = \alpha + i\beta$ מספר מרוכב. נגדיר: $e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$

ניתן לראות שהפונקציה המעריכית המרוכבת מקיימת את כל התכונות של הפונקציה המעריכית הממשית.

אם נבחר כ-λ מספר מדומה טהור, $\lambda = 0 + i\beta$ נקבל על פי ההגדרה: $e^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x$. נציב במקום x את $-x$ ונקבל: $e^{-i\beta x} = \cos(-\beta x) + i\sin(-\beta x) = \cos\beta x - i\sin\beta x$. מהנוסחאות לעיל נובע מיד:

$$\begin{cases} \cos\beta x = \dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \\ \sin\beta x = \dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \end{cases}$$

הנוסחאות הנ"ל נקראות "נוסחאות אויילר".

נחזור עתה לפתרון המד"ר. גילינו שיש למד"ר שני פתרונות מרוכבים: $y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$ ו-$y_2 = e^{(\alpha-\beta x)} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$. אולם אנו מעוניינים בפתרונות ממשיים. אנחנו יודעים שכל צירוף לינארי של פתרונות הוא גם פתרון. אם כן, ניתן לקחת את שתי הפונקציות: $\hat{y}_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x}\dfrac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ו-$\hat{y}_2 = \dfrac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x}\dfrac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

פתרונות אלה הם בלתי תלויים לינארית: $W(x) = \left|\begin{pmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{pmatrix}\right|$. $W(0) = \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\right| = \beta \neq 0$, ולכן הפתרון הכללי של המשוואה הוא: $y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x)$.

דוגמאות:

1. $y'' + 6y' + 25y = 0$. המשוואה האופיינית היא: $x^2 + 6x + 25 = 0$. שורשיה הם: $-3 \pm 4i$. כלומר: $\alpha = -3$ ו-$\beta = 4$. שני פתרונות בת"ל הם: $y_1 = e^{-3x}\cos 4x$ ו-$y_2 = e^{-3x}\sin\beta x$ והפתרון הכללי הוא: $y(x) = e^{-3x}(c_1\sin 4x + c_2\cos 4x)$.
2. $y'' + \omega^2 y = 0$. המשוואה האופיינית היא: $x^2 + \omega^2 = 0$. שורשיה הם: $\pm\omega i$ כאן $\alpha = 0$ ו-$\beta = \omega$. לכן הפתרון הכללי הוא: $c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x$.

מקרה 3: $b^2 - 4ac = 0$. במקרה זה יש למשוואה שורש אחד $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$ והוא מספק פתרון אחד של המשוואה: $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}x}$. עלינו למצוא פתרון נוסף אשר יחד עם y_1 יהוו

מערכת בסיסית של פתרונות. ננקוט כאן בטריק (שבהמשך נרחיב עליו יותר). נציג פונקציה נעלמת $z(x)$ המוגדרת ע"י השוויון: $y(x)=e^{-\frac{b}{2a}x}z(x)$ ואת המד"ר נתרגם למשוואה בפונקציה הנעלמת $z(x)$. ע"י גזירת השוויון נקבל: $y'=e^{-\frac{b}{2a}x}(-\frac{b}{2a}z(x)+z'(x))$.
$y''=e^{-\frac{b}{2a}x}(\frac{b^2}{4a^2}z(x)\frac{b}{a}z'(x)+z''(x))$.

נציב ביטויים אלה במד"ר ונקבל (תוך התחשבות בתנאי $b^2-4ac=0$) ש: $z''=0$. מאינטגרציה פעמיים נקבל $z=c_1x+c_2$. אנחנו לא מעוניינים בפתרון כללי אלא רק בפתרון מסויים, ולכן נבחר $z(x)=x$. קיבלנו שהפתרון השני שלנו הוא: $y_2=e^{-\frac{b}{2a}x}x$. נוכיח שהם בת"ל:

$$W(0)=\left|\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{b}{2a} & 1\end{pmatrix}\right|=W(x)=\left|\begin{pmatrix}e^{-\frac{b}{2a}x} & e^{-\frac{b}{2a}x}x\\ -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}x} & e^{-\frac{b}{2a}x}(1-\frac{b}{2a}x)\end{pmatrix}\right|$$

1. מסקנה: הפתרון הכללי הוא: $y(x)=c_1e^{-\frac{b}{2a}x}+c_2xe^{\frac{b}{2a}x}=(c_1+c_2x)e^{-\frac{b}{2a}x}$.

דוגמא: נפתור את המשוואה $y''-4y'+4y=0$. המשוואה האופיינית היא: $x^2-4x+4=0$. יש לה פתרון אחד $x=2$. לכן הפתרון הכללי הוא $y(x)=(c_1+c_2x)e^{2x}$.

כעת, ניתן דוגמא מהמציאות. נחזור למקרה של קפיץ, אותו הצגנו בתחילת הנושא של משוואות ממעלה שניה. יהי גוף המחובר לקפיץ אופקי. נסמן בy את המרחק שהוא עובר מנקודת שיווי המשקל. נקבל את הנוסחא הבאה: $y''=-\frac{k}{m}y$. כלומר, אם נסמן $\omega^2=\frac{k}{m}$ (מכיוון שזה תמיד חיובי אפשר לסמן ככה), נקבל את המשוואה $y''+\omega^2y=0$. אותה כבר פתרנו. הפתרון הכללי שלה הוא $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$. כל גוף שנע בתנועה כזאת, או לחילופין שמשוואת תנועתו מתוארת ע"י המד"ר לעיל, נע ב"תנועה הרמונית". יש דברים רבים בטבע שנעים בתנועה הרמונית, כמו למשל מיתרי גיטרה, גלי אור, ועוד. כעת נציב תנאי התחלה בשביל לקבל פתרון מסויים. נניח שמתחנו את הגוף 10 ס"מ לפני נקודת שיווי המשקל, ואז עזבנו. זה אומר שברגע $t=0$, $y=-10$. כמו כן, $v(0)=y'(0)=0$. נציב במשוואות ונקבל $y=-10\cos\omega t$. זה אומר שהגוף נע קדימה ואחורה, בתוך הקטע של 10 ס"מ לפני ואחרי נקודת שיווי המשקל, בלי הפסקה. דבר כזה כמובן לא יכול לקרות במציאות (גוף שנע לנצח). אבל זה לא אומר שטעינו בפתרון־ הסיבה לכך, היא שבציאות קיים כח החיכוך, ממנו התעלמנו. כפי שכבר ראינו בעבר, כח החיכוך פועל בניגוד לכיוון התנועה, והוא פרופורציונאלי למהירות הגוף. נסמנו ב$-lv$ (l הוא מקדם החיכוך). נקבל את המשוואה הבאה: $my''=ma=F=-ky-ly'$. כלומר, $y''+ly'+\frac{k}{m}y=0$. נסמן $\omega^2=\frac{k}{m}$ ו$2b=\frac{l}{m}$. נקבל: $y''+2by'+\omega^2y=0$. המשוואה האופיינית היא: $\lambda^2+2b\lambda+\omega^2$ שפתרונותיה הם: $\lambda_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-\omega^2}$.

יש 3 סוגים של פתרונות אפשריים:
תנועה מרוסנת: כאשר $b^2>\omega^2$
תנועה קריטית: כאשר $b^2=\omega^2$
תנועה בלתי מרוסנת: כאשר $b^2<\omega^2$.
נדון בכל אחת מהן בנפרד:

תנועה מרוסנת: מכיוון ש$b^2 > \omega^2$ אז השורש קטן מb ולכן יש פתרונות ממשיים שליליים $-\lambda_1, -\lambda_2$ ומשוואת התנועה היא: $y = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$. כמו שניתן לראות, התנועה כלל לא מחזורית, ושואפת ל0 עם הזמן.

תנועה קריטית: יש פתרון יחיד שלילי $-b$ ולכן משוואת התנועה היא $y = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt}$. גם פה ניתן לראות שבאינסוף הוא יחזור לשיווי משקל.

תנועה בלתי מרוסנת: יש שני פתרונות מרוכבים, לכן הפתרון הכללי הוא מהצורה $e^{-bt}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin \beta t)$. במקרה הזה אכן התנועה תהיה מחזורית, אבל המחזורים הולכים וקטנים עם הזמן. (כמובן שבאינסוף נעצר)

משוואה הומוגנית כללית- הפתרון השני

בפרק הקודם ראינו שעל מנת לפתור משוואה לינארית הומוגנית צריך למצוא שני פתרונות בלתי תלויים. כעת נראה שלמעשה מספיק למצוא אחד, והפתרון השני ייבנה בעזרת הפתרון הראשון בשיטה שהצגנו בסעיף הקודם.

נדגים תחילה את השיטה במשוואה הבאה: $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0$. זוהי משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בכל קטע שאינו מכיל את 0. כרגע אין לנו שיטה לפתור אותה.

נניח שניחשנו פתרון אחד: $y_1 = x^3$. נמצא פתרון שני, y_2 בעזרת ההצבה: $y(x) = y_1(x)z(x) = x^3 z(x)$. ע"י גזירת השוויון נקבל: $y' = x^3 z' + 3x^2 z$. $y'' = x^3 z'' + 6x^2 z' + 6xz$. נציב ביטויים אלו במד"ר ונקבל משוואה דיפרנציאלית עבור $z(x)$: $(x^3 z'' + 6x^2 z' + 6xz) - \frac{5}{x}(x^3 z' + 3x^2 z) + \frac{9}{x^2}(x^3 z) = 0$. כלומר, $x^3 z'' + (6x^2 - 5x^2)z' + (6x - 15x + 9x)z = 0$. דהיינו: $x^3 z'' + x^2 z' = 0$. נצמצם בx^3 ונקבל: $z'' + \frac{1}{x}z' = 0$. זאת "משוואה חסרה מטיפוס ראשון". נפתור אותה ע"י ההצבה: $u(x) = z'(x)$. נקבל: $u'(x) + \frac{1}{x}u(x) = 0$. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון, ופתרונה הכללי הוא: $u(x) = \frac{a}{x}$. אין לנו עניין בפתרון הכללי של המשוואה כיוון שאנחנו מחפשים פתרון מסויים. לכן נבחר $u(x) = \frac{1}{x}$. נציב את $u(x)$ ונקבל משוואה מסדר ראשון עבור z: $z' = \frac{1}{x}$. ולכן $z = \ln|x|$ (שוב בחרנו פתרון מסויים). לסיכום, $y_2 = x^3 \ln|x|$. צריך לבדוק שהם בת"ל. אנחנו לא נעשה את זה כרגע.

כעת ננסח את התהליך הכללי.

משפט 0.38 אם y_1 הוא פתרון של משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני בקטע I, והוא שונה מ0 בקטע (כלומר, לא מתאפס בשום נקודה בקטע), אז פתרון נוסף בקטע I ניתן למצוא בהצבה: $y(x) = y_1(x)z(x)$. הצבה זו מובילה למשוואה דיפרנציאלית חסרה מסדר שני.

הוכחה: יהי y_1 פתרון של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ בעלת מקדמים רציפים בקטע I ו$y_1(x) \neq 0$ בקטע. נבחר פונקציה נעלמת חדשה: $z(x) = \frac{y(x)}{y_1(x)}$ ונציב: $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$. נגזור ונקבל: $y' = y_1 z' + y_1' z$. $y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$. נציב ביטויים

אלה במשוואה עבור $y(x)$ ונקבל:

$$y_1z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' + (y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)z = 0$$

כיוון שy_1 פתרון של המשוואה ההומוגנית הנתונה הרי שהמקדם של z מתאפס. משוואה זו היא איפה משוואה חסרה: $y_1z'' + (2y_1' + p(x)y_1)z' = 0$. כזכור, פותרים משוואה כזו ע"י ההצבה: $u(x) = z'(x)$ ומתקבל משוואה לינארית מסדר ראשון ב$u(x)$: $y_1u' + (2y_1' + p(x)y_1)u = 0$. דהיינו: $u' + (2\frac{y_1'}{y_1} + p(x))u = 0$. המקדם של u הוא פונקציה רציפה, ולכן קיים למשוואה זו פתרון בכל הקטע I. יהי $u(x)$ פתרון לא טריוויאלי כזה. נציב אותו, ובאינטגרציה נמצא את $z(x)$, ובעקבותיו את הפתרון השני y_2. הוורונסקיאן של שתי הפתרונות הוא: $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2 = y_1(y_1z' + y_1'z) - y_1'y_1z = y_1^2z' = y_1^2u$. ידוע ש$y_1(x) \neq 0$ בכל הקטע, וכן שu היא הפתרון הטרייויאלי, ולכן שונה מ0 באיזושהי נקודה, (גורר ממשפט הקיום והיחידות שהיא שונה מ0 בכל הנקודות), לכן הוורונסקיאן לא מתאפס, והפתרונות בת"ל. ■

דוגמאות:

1. $y'' + (\tan x)y' - (2\tan x + 4) = 0$. בדיקה מאשרת ש$y = e^{2x}$ הוא פתרון, ואכן $y_1 \neq 0$. נציב: $y(x) = e^{2x}z(x)$. לכן $y' = e^{2x}(z' + 2z)$ ו$y'' = e^{2x}(z'' + 4z' + 4z)$. נציב במשוואה ונקבל:

$$e^{2x}(z'' + 4z' + 4z) + (\tan x)e^{2x}(z' + 2z) - (2\tan x + 4)e^{2x}z = 0$$

לאחר כינוס איברים וצמצום $e^{2x} \neq 0$ נקבל: $z'' + (4 + \tan x)z' = 0$ כלומר, $u' + (4 + \tan x)u = 0$ כאשר $u = z'$. נפתור את המשוואה בהפרדת משתנים: $\frac{du}{u} + (4 + \tan x)dx = 0$. $\ln|u| + 4x - \ln|\cos x| = 0$. או: $u = e^{-4x}\cos x$. $z(x)$ מתקבל ע"י אינטגרציה: $z(x) = \int^x e^{4t}\cos t dt = \frac{1}{17}e^{-4x}(\sin x - 4\cos x)$. ולכן הפתרון השני הוא: $y_2 = e^{2x}z(x) = \frac{1}{17}e^{-2x}(\sin x - 4\cos x)$. כל כפולה שלו היא גם פתרון, ולכן נוכל להכפיל ב17. לסיכום, הפתרון הכללי הוא: $c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}(\sin x - 4\cos x)$.

2. $y'' - xy' + y = 0$. קל לראות שפתרון אחד של המשוואה הוא $y_1(x) = x$. נציב $y = xz$, $y' = xz' + z$, $y'' = xz'' + 2z'$. הצבת y ונגזרותיה במשוואה תיתן $xz'' + (2 - x^2)z' = 0$. שוב נציב $u = z'$. u מקיים את המשוואה: $xu' + (2 - x^2)u = 0$ שפתרונה הפרטי הוא: $u(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{2}x^2}$. ואינטגרציה תיתן: $z(x) = \int^x \frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{2}t^2}dt$. אי אפשר לבטא את האינטגרל האחרון בעזרת פונקציות אלמנטריות. שני הפתרונות הבלתי תלויים של המשוואה הנתונה הם איפוא: $y_1(x) = x$ ו $y_2(x) = x\int^x \frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{2}t^2}$. מסקנה: ייתכן מצב שהפתרון הראשון הוא פונקציה אלמנטרית, ובכל זאת הפתרון השני יבוטא רק באמצעות אינטגרל.

משוואה אי־ הומוגנית־ וריאציית הפרמטרים

ראינו שבשביל לפתור משוואה לינארית אי הומוגנית מספפיק למצוא את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה, ופתרון פרטי אחד של האי הומוגנית. כעת נראה שלמעשה

ניתן לגלות פתרון פרטי באמצעות הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

משפט 0.39 למשוואה לינארית אי־הומוגנית $y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$ בעלת מקדמים רציפים בקטע I, יש פתרון שהצגתו היא: $y(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ כאשר y_1 וy_2 הם מערכת בסיסית כלשהי של פתרונות של המשוואה ההומוגנית, וc_1,c_2 הן פונקציות המתקבלות מy_1 וy_2 באמצעות פתירת משוואות אלגבריות ואינטגרציה בלבד.

הוכחה: תהי (y_1,y_2) מערכת בסיסית כלשהי של פתרונות של המשוואה ההומוגנית. נחפש את הפתרון הפרטי של המשוואה האי הומוגנית בצורה: $y=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ כאשר c_1 וc_2 הן פונקציות שעלינו למצוא. נגזור את השוויון ונקבל: $y'=c_1y_1'+c_2y_2'+$ $c_1'y_1+c_2'y_2$. בטרם נמשיך ונגזור שנית נשים לב שבגזירה השניה תופענה הנגזרות מסדר שני של c_1' וc_2' של פונקציות לא ידועות. אנחנו לא מעוניינים בכך ולכן ננסה להטיל הגבלה ונדרוש: $c_1'y_1+c_2'y_2=0$. (שימו לב, זה לא אומר שקיים פתרון שאכן יענה על ההגבלה הזאת. זה אומר שאנחנו מחפשים פתרון שגם עונה על ההגבלה. אם נצליח למצוא אחד כזה, אז בפרט הוא פתרון.)

נקבל ש: $y'=c_1y_1'+c_2y_2'$. נגזור שנית ונקבל:
$y''=c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1'+c_2'y_2'$.
נציב את y y' וy'' במשוואה, ונקבל:

$$c_1y_1''+c_2y_2''+c_1'y_1'+c_2'y_2'+p(x)(c_1y_1'+c_2y_2')+q(x)(c_1y_1+c_2y_2)=g(x)$$

אחרי סידור איברים:

$$c_1(y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1)+c_2(y_2''+p(x)y_2'+q(x)y)+c_1'y_1'+c_2'y_2'=g$$

הביטויים שבסוגריים שווים ל0 (כי y_1 וy_2 הם פתרונות של הערכת ההומוגנית) ולכן השוויון האחרון מקבל את הצורה: $c_1'y_1'+c_2'y_2'=g$
נרשום את התנאים כמערכת משוואות:

$$\begin{cases} c_1'y_1+c_2'y_2=0 \\ c_1'y_1'+c_2'y_2'=g \end{cases}$$

לכל $x\in I$ זאת מערכת משוואות לינאריות בשני נעלמים. דטרמיננטת המקדמים שלה היא הוורונסקיאן: $W(x)=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}\right|$ מאחר שמקדמי המשוואה רציפין בקטע I נקבל שהוורונסקיאן שונה מ0 בכל נקודה בI (כי זאת מערכת של שני פתרונות בסיסיים של המשוואה ההומוגנית), ולכן לכל $x\in I$ יש פתרון למערכת. הפתרון הוא: $c_1'(x)=\dfrac{-g(x)y_2(x)}{W(x)},c_2'=\dfrac{g(x)y_1(x)}{W(x)}$ ומכאן:

$$\begin{cases} c_1(x)=-\int^x\dfrac{-g(t)y_2(t)}{W(t)}dt \\ c_2(x)=\int^x\dfrac{g(t)y_2(t)}{W(t)}dt \end{cases}$$

■

סיכום התהליך:

א. פותרים את המשוואה ההומוגנית ומוצאים מערכת של שני פתרונות בסיסיים y_1 ו-y_2

ב. רושמים צירוף $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(xy_2(x)$

ג. פותרים את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} c_1'y_1 + c_2'y_2 = 0 \\ c_1'y_1' + c_2'y_2' = g \end{cases}$$

ד. ע"י אינטגרציה מגלים את c_1 ו-c_2, ומציבים ב-y.

דוגמא:

נפתור את המשוואה: $y'' - 9y = 5e^{3x}$.

מערכת בסיסית של פתרונות היא: $y_1 = e^{3x}$ ו-$y_2 = e^{-3x}$. נחפש פתרון של המשוואה בצורה $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$. שתי המשוואות שלנו הן:

$$\begin{cases} c_1'e^{3x} + c_2'e^{-3x} = 0 \\ 3c_1'e^{3x} - 3c_2'e^{-3x} = 5e^{3x} \end{cases}$$

שפתרונה הוא: $c_1' = \frac{5}{6}$, $c_2' = -\frac{5}{6}e^{6x}$.

ובאינטגרציה נקבל: $c_1 = \frac{5}{6}x$ ו-$c_2 = -\frac{5}{36}e^{6x}$.

מכאן נקבל: $y = c_1e^{3x} + c_2e^{3x} = \frac{5}{6}xe^{3x} - \frac{5}{36}e^{3x}$.

נשים לב שהרכיב השני בחיבור הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה, ולכן אם נחסר אותו מ-y עדיין נקבל פתרון של המשוואה שלנו. מכאן ש: $y = \frac{5}{6}xe^{3x}$ גם הוא פתרון פרטי.

לסיכום, הפתרון הכללי הוא: $y = ae^{3x} + be^{3x} + \frac{5}{6}xe^{3x}$.

שאלה: איך נפתור משוואה לינארית לא הומוגנית, כאשר ידוע רק פתרון אחד של המשוואה ההומוגנית? לכאורה ניתן לשלב את שתי השיטות האחרונות שלמדנו־ראשית, למצוא פתרון שני למשוואה ההומוגנית, ולאחר מכן בעזרת וריאציית הפרמטרים למצוא פתרון פרטי לאיהומוגנית. אולם, במקרה זה קיימת דרך יותר קצרה:

דוגמא:

נפתור את המשוואה $x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$. כאשר נתון פתרון אחד: $y_1 = \frac{1}{x}$.

נחזור על תהליך הורדת סדר המשוואה לגבי המשוואה האי־הומוגנית. נציב: $y = y_1z = \frac{z}{x}$.

נגזור: $y' = \frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2}$.

נגזור שוב: $y'' = \frac{z''}{x} - \frac{2z'}{x^2} + \frac{2z}{x^3}$

בהצבה במשוואה מתקבלת משוואה לינארית חסרה: $xz'' + 5z' = x$

נציב $z' = u$

ונקבל: $xu' + 5u = x$. כלומר $u' + \frac{5}{x}u = 1$.

הפתרון הכללי של המשוואה האחרונה הוא: $u = \frac{x}{6} + cx^{-5}$.

מכאן: $z = \frac{x^2}{12} - \frac{c}{4}x^{-4} + c_1$

ולכן: $y=\frac{z}{x}=\frac{x}{12}-\frac{c}{4}x^{-5}+c_1x^{-1}$.
קיבלנו את הפתרון הכללי של המשוואה האי הומוגנית. ביחד איתו קיבלנו גם את הפתרון השני של המשוואה ההומוגנית־ $y_2=x^{-5}$.

שיטת "וריאציית הפרמטרים" היא שיטה כללית ולפיה נוכל לפתור כל משוואה לינארית אשר ידועים פתרונות ההומוגנית המתאימה. אולם לעיתים דרך זו היא מייגעת במיוחד. נדגים זאת:

דוגמא:

$y''-3y'-4y=50\cos 2x$.

הפתרון הכללי של ההומוגנית הוא: $y=ae^{4x}+be^{-x}$.

אנחנו מחפשים פתרון פרטי מהצורה: $y=c_1(x)e^{4x}+c_2(x)e^{-x}$.

לצורך כך עלינו לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} e^{4x}c_1'+e^{-x}c_2'=0 \\ 4e^{4x}c_1'-e^{-x}c_2'=50\cos 2x \end{cases}$$

הפתרון הוא: $c_1'=10e^{x}\cos 20x$ ו־$c_2'=10e^{-4x}\cos 2x$.

על מנת למצוא את c_1 ו־c_2 נצטרך לעשות אינטגרציה בחלקים מייגעת.

עבור משוואה מהצורה $ay''+by'+cy=g(x)$, כאשר ל־$g(x)$ יש צורה מיוחדת, נוכל למצוא פתרון פרטי בדרך יעילה יותר אשר אינה כרוכה באינטגרציה. דרך זו מכונה "שיטת המקדמים".

שיטת המקדמים

נתחיל בדוגמאות:

1. נמצא פתרון פרטי למשוואה $y''-3y'-4y=50\cos 2x$. טבעי לחפש פתרון כצירוף של $\cos 2x$ ו־$\sin 2x$. נכתוב: $y_p=a\cos 2x+b\sin 2x$.

$y_p'=-2a\sin 2x+2b\cos 2x$.

$y_p''=4a\cos 2x-4b\sin 2x$

נציב במשוואה ונקבל לאחר כינוס איברים דומים: $(-8a-6b)\cos 2x+(6a8b)\sin 2x=50\cos 2x$.

על מנת שיתקיים שוויון נדרוש כי: $6a-8b=0$ ו־$-8a-6b=50$

זאת מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים, ופתרונה הוא: $a=-4, b=-3$.

לכן: $y_p=-3\sin 2x-4\cos 2x$

2. $y''-3y'-4y=4x^2$

באגף ימין רשום פולינום ממעלה שניה. נחפש פתרון פרטי שהוא פולינום מאותה מעלה.

נרשום: $y_p=ax^2+bx+c$

נגזור: $y_p'=2ax+b$

נגזור שנית: $y_p''=2a$

ונציב: $2a-3(2ax+b)-4(ax^2+bx+c)=4x^2$.

נסדר: $-4ax^2+(-6a-4b)x+(2a-3b-4c)=4x^2$

כדי שיתקיים שוויון , צריך שיתקיים:

$$\begin{cases} -4a=4 \\ -6a-4b=0 \\ 2a-3b-4c=0 \end{cases}$$

מכאן: $a=-1, b=\frac{3}{2}, c=-\frac{13}{8}$

כלומר, פתרון פרטי הוא: $y_p=-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$

3. $y''-3y=4x^2$

כמו קודן, ננסה פולינום ממעלה שניה: $y_p=ax^2+bx+c$. נציב ונקבל: $2a-3(2ax+b)=4x^2$

באגף ימין יש פולינום ממעלה שניה, ואילו באגף שמאל פולינום ממעלה ראשונה. לא ייתכן שוויון.

לכן, ניקח פולינום ממעלה שלישית: ax^3+bx^2+cx+d. נשים לב שd (מספר קבוע) הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית ולכן אפשר לוותר עליו. כלומר, $y_p=x(ax^2+bx+c)$. נציב במשוואה ונמצא את ערכי המקדמים.

4. $y''-9y=e^{2x}$

הנגזרות של e^{2x} הן כפולות של עצמו, לכן ננסה פתרון מהצורה $y_p=ae^{2x}$.

נגזור ונציב במשוואה. $4ae^{2x}-9ae^{2x}=e^{2x}$. מכאן: $a=-\frac{1}{5}$.

5. $y''-9y=5e^{3x}$.

הפעם לא נוכל לנסות פתרון מהצורה ae^{3x} כי אנחנו כבר יודעים שזה פתרון של המערכת ההומוגנית. בדוגמא 3 קיבלנו פתרון ע"י הכפלה בx של הפתרון של המערכת ההומוגנית. ננסה להפעיל שיטה דומה גם כאן. נחפש פתרון פרטי מהצורה $y=e^{3x}f(x)$. מהו התנאי על $f(x)$? ובכן, $y'=e^{3x}(f'+3f)$. $y''=e^{3x}(f''+6f'+9f)$. ולכן: $y''-9y=e^{3x}(f''+6f')=5e^{3x}$. מכאן אנחנו מסיקים שעל f לקיים משוואה דיפרנציאלית: $f''+6f'=5$. באגף ימין רשום פולינום ממעלה 0, ולכן נחפש פתרון פרטי של משוואה זו שאף הוא פולינום. מאיזו מעלה? באגף שמאל של המשוואה חסר f ולכן נחפש פתרון בצורת פולינום ממעלה ראשונה: $f=ax$.

בהצבה במשוואה מתקבל: $0+6a=5\implies a=\frac{5}{6}$. כלומר, הפתרון הפרטי הוא $\frac{5}{6}xe^{3x}$.

כעת, נוכל לעבור למקרה הכללי. אנחנו נטפל במשוואות שצורתן: $ay''+by'+cy=g(x)$ עבור

1. $g(x)=P_m(x)=a_mx^m+...+a_0$
2. $g(x)=P_m(x)e^{\alpha x}$
3. $g(x)=P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$
4. $g(x)=P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

ובכן, נתחיל במקרה הראשון.

טענה 0.40 תהי נתונה המשוואה: $ay''+by'+cy=P_m(x)=a_mx^m+...+a_0$.

- אם $c\neq 0$ למשוואה יש פתרון שצורתו $y_p=A_mx^m+...+A_0$
- אם $c=0$ ו$b\neq 0$, למשוואה יש פתרון שצורתו $y_p=x(A_mx^m+...+A_0)$
- אם $c=0$ ו$b=0$ למשוואה יש פתרון מהצורה $y_p=x^2(A_mx^m+...+A_0)$

הוכחה:

- נציב במשוואה $y = A_m x^m + ... + A_0$.
$y' = mA_m x^{m-1} + ... + 2A_2 x + A_1$
$y'' = m(m-1)A_m x^{m-2} + ... + 2A_2$
נקבל: $a[m(m-1)A_m x^{m-2} + ... + 2A_2] + b[mA_m x^{m-1} + ... + 2A_2 x + A_1] +$
$c[A_m x^m + ... + A_1 x + A_0] = a_m x^m + ... + a_0$
הפונקציה תהיה פתרון של המשוואה אמ"ם בשוויון האחרון שווים המקדמים של החזקות הדומות של x בשני האגפים. כלומר:
$cA_m = a_m$
$cA_{m-1} + mbA_m = a_{m-1}$
$cA_{m-2} + (m-1)bA_{m-1} + m(m-1)aA_m = a_{-m-2}$
...
$cA_1 + 2bA_2 + 6aA_3 = a_1$
$cA_0 + bA_1 + 2aA_2 = a_0$
זוהי מערכת משוואות אלגבריות בנעלמים $A_0, ..., A_m$. מאחר ש$c \neq 0$ יש למערכת פתרון.

- $c = 0$, $b \neq 0$.
המשוואה במקרה זה נראית כך: $ay'' + by' = a_m x^m + ... + a_0$.
נציב: $y = x(A_m x^m + ... + A_0) = A_m x^{m+1} + ... + A_0 x$
$y' = (m+1)A_m x^m + ... + 2A_1 x + A_0$
$y'' = m(m+1)A_m x^{m-1} + ... + 2A_1$
נקבל: $a[m(m+1)A_m x^{m-1} + ... + 2A_1] + b[(m+1)A_m x^m + ... + 2A_1 x + A_0] =$
$a_m x^m + ... + a_0$
הפונקציה תהיה פתרון של המשוואה אמ"ם מתקיים:
$b(m+1)A_m = a_m$
$bmA_{m-1} + am(m+1)A_m = a_{m-1}$
...
$bA_0 + a2A_1 = a_0$
מאחר ש$b \neq 0$ יש פתרון למערכת.

■

מקרה 2:
$g(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$
נוכל לחזור אל המקרה הקודם אם נציב: $y = e^{\alpha x} f(x)$, $y' = e^{\alpha x}(f' + \alpha f)$, $y'' = e^{\alpha x}(f'' + 2\alpha f' + \alpha^2 f)$.
לכן: $ay'' + by' + cy = e^{\alpha x}[af'' + (2a\alpha + b)f' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)f] = P_m(x)e^{\alpha x}$
נצמצם ב$e^{\alpha x}$, ונקבל את התנאי על $f(x)$:
$af'' + (2a\alpha + b)f' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)f = P_m(x)$.
נשים לב ש$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \iff \alpha$ הוא פתרון של $ax^2 + bx + c$. כמו כן, במידה והמקדם השלישי שווה 0, כלומר α הוא פתרון, אז $2a\alpha + b = 0$ אמ"ם $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$, כלומר, α הוא הפתרון היחיד. מכאן נקבל כמסקנה מיידית את הטענה הבאה:

טענה 0.41 תהי נתונה המשוואה $ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{\alpha x}$.

- אם $e^{\alpha x}$ איננה פתרון שלל המשוואה ההומוגנית המתאימה, יש למשוואה פתרון שצורתו $y_p = (A_m x^m + ... + A_0)e^{\alpha x}$.

- אם הפונקציה $e^{\alpha x}$ היא פצרון של המשוואה ההומוגנית, אך לא כן הפונקציה $xe^{\alpha x}$ - יש למשוואה פתרון שצורתו $y_p = x(A_m x^m + ... + A_0)$.

- אם $e^{\alpha x}$ ו$xe^{\alpha x}$ הן פתרונות של המשוואה ההומוגנית- יש למשוואה פתרון שצורתו $y_p = x^2(A_m x^m + ... + A_0)$

דוגמא: נפתור את המשוואה $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.
ובכן, הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא $c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$. לכן נחפש פתרון מהצורה $y_p = x^2(Ax + B)e^{2x}$
נגזור פעמיים, נציב, נקבל משוואות על A וB.
מקרה שלישי:

$$g(x) = \begin{cases} P_m(x)e^{\alpha x}\cos x \\ P_m(x)e^{\alpha x}\sin x \end{cases}$$

אם נשתמש בפונקציה מעריכית מרוכבת, נוכל להציג מקרה שה כמו המקרה הקודם, על פי הגדרת הפונקציה המעריכית:

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x$$

דהיינו: $e^{\alpha x}\cos\beta x = Re(e^{(\alpha+\beta x)x})$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x = Im(e^{(\alpha+i\beta)x})$$

טענה 0.42 אם $e^{(\alpha+i\beta)x}$ איננו פתרון של המשוואה ההומוגנית $ay'' + by' + cy = 0$ (כלומר, $\alpha \pm i\beta$ אינה שורשים של המשוואה האופיינית) יש למשוואה $ay'' + by' + cy = P_m(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ פתרון שצורתו $y = (A_m x^m + ... + A_0)e^{(\alpha+i)x}$
אם $(\alpha \pm i\beta)$ הם כן שורשים של המשוואה האופיינית, יש למשוואה פתרון שצורתו $x(A_m x^m + ... + A_0)e^{(\alpha+i\beta)x}$.
הערה: המקרה שבו אחד המספרים המרוכבים הוא שורש כפול לא ייתכן.

דהערה: לבסוף, לוקחים את החלק הממשי או המדומה של הפתרון, בהתאמה.
דוגמא: מצא פתרון פרטי למשוואה $y'' - y = e^x\cos x$.
פתרון: $\alpha = \beta = 1$. $1 \pm i$ אינם שורשים של המשוואה האופיינית. לכן נחפש פתרון פרטי בצורה: $y = Ae^{(1+i)x}$.
הנגזרות הן: $y' = A(1+i)e^{(1+i)x}$

$$y'' = A(1+i)^2e^{(1+i)x}$$

הצבה במשוואה תיתן: $A(1+i)^2e^{(1+i)x} - Ae^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}$
נצמצם ב$e^{(1+i)x}$ ונקבל: $A[(1+i)^2 1] = 1$ או: $A = \dfrac{1}{2i-1}$. אפשר לרשום את A גם כך: $A = \dfrac{1}{2i-1} = \dfrac{-1-2i}{(-1+2i)(-1-2i)} = \dfrac{-1-2i}{5} = -\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$.
ולכן הפתרון הפרטי של y הוא: $y = (-\dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i)e^{(1+i)x}$
כדי למצוא פתרון פרטי למשוואה הנתונה ניקח את החלק הממשי של y, כלומר:

$$y_p = Re[(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i)e^{(1+i)x}] = Re[(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i)e^x(\cos x + i\sin x)] = (-\frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x)e^x$$

משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר n

מכיוון שהתורה של משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר n דומה בכל פרטיה לזאת של משוואות מסדר שני, אנחנו רק נצטט את המשפטים ועיקרי הדברים מבלי להוכיח.

משפט 0.43 (משפט הקיום והיחידות) תהיינה $p_{n-1}(x), ..., p_0(x)$ ו$g(x)$ פונקציות רציפות בקטע פתוח I. תהי x_0 נקודה כלשהי בI ויהיו $y_{n-1}, ..., y_0$ n מספרים כלשהם. אזי לבעיית הערכים ההתחלתיים:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_0 y = g(x)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

קיים בקטע I פתרון יחיד.

למה 0.44 תהי נתונה המשוואה ההומוגנית $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + p_0(x)y = 0$ בעלת מקדמים רציפים בקטע I. אזי:

1. יש למשוואה פתרון טריוויאלי בקטע I: $y(x) \equiv 0$
2. כל צירוף לינארי של פתרונות הוא פתרון.
3. הפתרון היחיד המקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה:

$$y(x_0) = ... = y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

הוא הפתרון הטריוויאלי.

תזכורת: קבוצה של n פונקציות המוגדרות בקטע I נקראת תלויה לינארית, אם יש צירוף לינארי שלה שמתאפס בכל נקודה בקטע.

משפט 0.45 תהיינה $f_1, .., f_n$ פונקציות בעלות כל הנגזרות עד הסדר ה$n-1$ בקטע I. הוורונסקיאן של הפונקציות הוא הדטרמיננטה המוגדרת ע"י:

$$W(f_1, ..., f_n; x) =$$

משפט 0.46 יהיו $y_1, ...y_n$ פתרונות של משוואה דיפרנציאלית לינארית הומוגנית מסדר n בעלת מקדמים רציפים בקטע I.

1. אם הם בלתי תלויים בI אז הוורונסקיאן שלהם שונה מ0 בכל נקודה בI.
2. אם הוורונסקיאן שונה מ0 בנקודה כלשהי בקטע, אז הפתרונות בלתי תלויים בקטע (ולכן הוורונסקיאן שונה מ0 בכל נקודה בקטע)

משפט 0.47 למשוואה לינארית הומוגנית מסדר n בעלת מקדמים רציפים בקטע I יש מערכת של n פתרונות בלתי תלויים בקטע, וכל פתרון הוא צירוף לינארי שלהם.

משוואה הומוגנית עם מקדמים קבועים

משוואה לינארית הומוגנית עם מקדמים קבועים נראית כך:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$$

נבנה מערכת בסיסית של פתרונות.
גם כאן, ננחש פתרון מהצורה $y = e^{\lambda x}$ ונקבל שהוא פתרון אמ"ם λ שורש של המשוואה האופיינית.
נסכם את כל המקרים האפשריים:

1. אם לפולינום האופייני יש n שורשים שונים $\lambda_1, ..., \lambda_n$, אז יש מערכת של פתרונות בסיסיים $e^{\lambda_1}, ..., e^{\lambda_n}$.

2. ראשית, נגדיר מה זה ריבוי של שורש. λ יקרא שורש מריבוי k של פולינום $p(x)$ אם $(x-\lambda)^k | p(x)$ ו-$(x-\lambda)^{k+1} \nmid p(x)$. למשל: בפולינום $p(x) = (x-2)^2(x-1)(x+3)$ 2 הוא שורש מריבוי 2, 1 הוא שורש מריבוי 1, ו-$3-$ הוא שורש מריבוי 1.
ובכן, אם λ הוא שורש מריבוי k אז הפתרונות שהוא תורם הם $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{k-1}e^{\lambda x}$.

3. אם λ מרוכב, כלומר $\lambda = \alpha + i\beta$ אז בהכרח גם הצמוד לו הוא שורש, כלומר, $\alpha - i\beta$, ושניהם תורמים ביחד את הפתרונות $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ו-$e^{\alpha x}\sin\beta x$. שימו לב: אם λ מרוכב מריבוי k אז הוא תורם את הפתרונות:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

דוגמאות:

1. פתור את המשוואה: $y^{(4)} + 3y^{(3)} - 15y'' - 19y' + 30y = 0$.
פתרון: הפולינום האופייני הוא: $x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 19x + 30 = 0$.
בשביל למצוא את הפתרונות שלו, ראשית ננחש פתרון אחד. אם יש פתרון שלם הוא חייב לחלק את המקדם החופשי. מהצבת המספר 1 מגלים כי 1 הוא פתרון. כעת נחלק את הפולינום ה-$(x-1)$ ונקבל $x^3 + 4x^2 - 11x - 30$. ננחש שורש, ונקבל מהצבה ש-$2-$ הוא שורש. נחלק ב-$(x-2)$ ונקבל $x^2 + 2x - 15$, שפתרונותיו הם -5 ו-3. לכן השורשים של הפולינום האופייני הם: $1, -2, 3, -5$, ומכאן הפצרון הכללי הוא: $c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_4e^{-5x}$.

2. פתור את המשוואה $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$.
פתרון: המשוואה האופיינית היא: $x^8 + 4x^4 + 16 = (x^4+4)^2 = 0$.
השורשים של $x^4 + 4$ הם $\lambda_k = \sqrt[4]{4}cis(\frac{\pi + 2\pi k}{4})$ עבור $k = 0, 1, 2, 3$.
$\lambda_0 = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$.

באופן דומה נמצא את השורשים האחרים, אשר הינם: $\pm 1 \pm i$. שימו לב שכולם שורשים כפולים. אם כן, הפתרונות הבסיסיים הינם:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^x \cos x & y_2 &= xe^x \cos x \\ y_3 &= e^x \sin x & y_4 &= xe^x \sin x \\ y_5 &= e^{-x} \cos x & y_6 &= xe^{-x} \cos x \\ y_7 &= e^{-x} \sin x & y_8 &= xe^{-x} \sin x \end{aligned}$$

משוואה אי הומוגנית

טענה 0.48 הפתרון הכללי של משוואה לינארית אי הומוגנית הוא סכום של הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה עם פתרון פרטי של האי הומוגנית.

גם כאן נתאר שתי שיטות למציאת פתרון פרטי.

ואיציית הפרמטרים

הערה: אם נגיע לזה, כשפותרים מערכת $x' = Ax$ וA לא לכסינה, ניתן לעשות את הדבר הבא: $x = (x_1, ..., x_n)$. כל x_i הוא פתרון של הפ"א של A. הפתרונות של הפולינום האופייני כלום מהצורה: $c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} + c_3t^2e^{\lambda t}$ ודברים מהסגנון)כי בהכרח יש ע"ע מריבוי גדול מ1. אז המטרה היא רק לבחור את המקדמים בכל פתרון. לכל פתרון נציב מקדמים נעלמים משלו. ואז נציב בחזרה במשוואות המקוריות, ומהשוואת המקדמים של $e^t.te^t$ וכו', נקבל מערכת ריבועית של משוואות ונעלמים, ונפתור אותה. ליתר דיוק: $y = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$ כאשר כל הפולינום הם מדרגה k, עבור k שווה להפרש של הריבוי האלגברי והגיאומטרי. נציב במשוואות המקוריות, ונקבל משוואות על הנעלמים. זה יתן לנו את הפתרון הכללי.