פתרון לתרגיל 5 (חדו"א 2 83-114)

1) חשבו את האינטגרלים הכפולים הבאים:

א) $$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$$

התחום הוא רבע דיסק היחידה ברביע הראשון. מחליפים לקואורדינטות פולריות:

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^2\, r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{8}$$

ב) $$\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

התחום הוא חצי העיגול העליון ברדיוס $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ סביב הראשית

$$\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x^2}} \cos(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\int_0^{\pi} \cos(r^2)\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \pi\left[\frac{1}{2}\sin(r^2)\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\pi}{2}$$

ג) $$\int_0^1\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$$

התחום הוא כלוא בין מעגל ברדיוס 2 לבין הישרים $x=0$ ו- $y=\sqrt{3}x$

(בזווית $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$)

$$\int_0^1\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{4-x^2}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_0^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\, r\, r\,d\theta\,dr = \int_0^2 r^3\left[\sin\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dr$$

$$= \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) חשבו את אינטגרל"ים משולשים הבאים

א) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$ כאשר D כדור היחידה

נעבור לקואורדינטות כדוריות:

$$\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho^2\rho^2 \sin(\phi)\, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_0^{\pi} \sin(\phi)\, d\phi$$

$$= \frac{4\pi}{5}$$

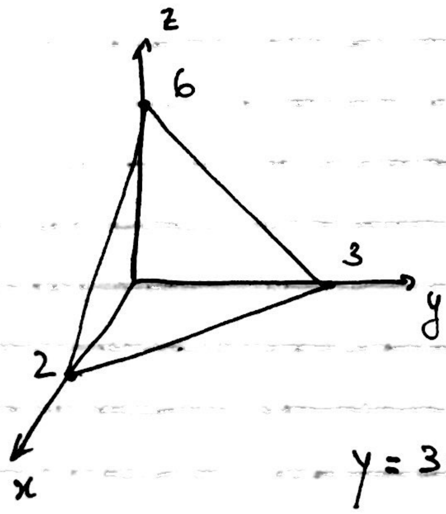
ב) $\iiint_D z(x^2+y^2)\,dxdydz$ כאשר D גוף סיבוב $z=\sqrt{x}$ סביב ציר z בין $z=0$ ל $z=1$

נעבור לקואורדינטות פולאריות גליליות. $D=\left\{\begin{matrix} r\\ \theta\\ z\end{matrix} \,\middle|\, r\leq z^2\right\}$

$$\iiint_D z(x^2+y^2)\,dxdydz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{z^2} z r^2\, r\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 z\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{z^2} dz = 2\pi\int_0^1 \frac{z^9}{4}\, dz = \frac{\pi}{20}$$

ג) $\iiint_D (1-x)\,dxdydz$



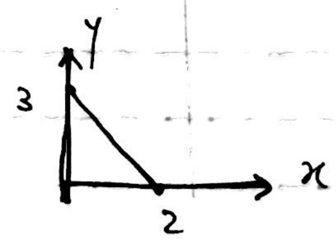
המשוואה של המישור

$z = 6-3x-2y$

אז $0\leq z\leq 6-3x-2y$

המשוואה של הישר $y=3-\frac{3}{2}x$

אז $0\leq y\leq 3-\frac{3}{2}x$



ובסוף $0\le x\le 2$ נקבל:

$$\iiint_D (1-x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2\left(\int_0^{3-\frac{3}{2}x}\left(\int_0^{6-2y-3x}(1-x)\,dz\right)dy\right)dx \,,$$

$$= \int_0^2 (1-x)\left(\int_0^{3-3/2x}(6-3x-2y)\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^2 \left(9-18x+\frac{45}{4}x^2-\frac{9}{4}x^3\right)dx = 3$$

3) חשבו את האורך העקומה $\gamma(t)=(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t)$ כאשר $t\in[0,1]$

$$\gamma'(t)=(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}) \Rightarrow \|\gamma'(t)\|=\sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2} = e^t+e^{-t}$$

$$L(\gamma)=\int_0^1 (e^t+e^{-t})\,dt = e-\frac{1}{e}$$

4) חשבו את $\int_D F\cdot dr$ כאשר $F(x,y)=(e^x-y+x,\ y^{\frac{3}{2}}+x)$ ו-D שפת מעגל שמרכזו בראשית ברדיוס 6 משפט גרין וללא.

• ללא משפט גרין: פרמטריזציה של המעילה היא $\gamma(t)=(6\cos t, 6\sin t)$ $t\in[0,2\pi]$

$$\int_D F\cdot dr = \int_0^{2\pi}\left(e^{6\cos t}-6\sin t+6\cos t,\ 6\sin^{3/2}t+6\cos t\right)\cdot(-6\sin t, 6\cos t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-6\sin t\, e^{6\cos t}+36\sin^2 t-36\sin t\cos t+36\sin^{3/2}t\cos t + 36\cos^2 t\right)dt$$

$$= 72\pi$$

• $P(x,y)=e^x-y+x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-1 \qquad Q(x,y)=y^{3/2}+x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=1$

$$\int_D F\cdot dr = \iint (1-(-1))\,dx\,dy = 2\underbrace{\iint dx\,dy}_{} = 2\cdot 36\pi = 72\pi$$

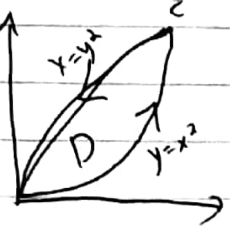
שטח של העיגול ברדיוס 6 ↳

פתרון תרגיל 5 - חלק ב.

5

$$\int_C \left(y+e^{\sqrt{x}}\right)dx + \left(2x+\cos(y^2)\right)dy$$

נרצה להשתמש במשפט גרין כיוון שהתבנית מסובכת.
C היא מסילה סגורה, ולכן ניתן להשתמש במשפט גרין ולקבל:



$$=\iint_D (2-1)\,dxdy = \iint_D dxdy$$

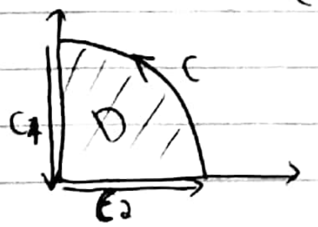
כאשר התחום D הוא השטח שכלוא בין $y=x^2$ ו $x=y^2$
והוא ניתן להצגה כתחום פשוט כך: $D=\{0\le x\le 1,\ x^2\le y\le \sqrt{x}\}$

$$=\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 1\,dy\,dx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}-x^2\,dx = \frac{x^{1.5}}{1.5}-\frac{x^3}{3} = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

6

$$\int_C \left(\tan x + xy^2\right)dx + \left(x+\cos(\pi y)\right)dy$$

גם כאן, התבנית מסובכת, ונרצה להשתמש בגרין.
לשם כך, נסגור את המסילה, ע"י המסילות C_1 ו- C_2 כמו בציור.



כעת המסילה סגורה ולפי גרין נקבל:

$$\int_{C\cup C_1\cup C_2} (\tan x + xy^2)\,dx + (x+\cos(\pi y))\,dy = \iint_D 1-2xy\,dxdy$$

כאשר D הוא $\frac{1}{4}$ העיגול.
נעבור לקורדינטות פולריות $y=r\sin\theta$, $x=r\cos\theta$
בתחום $D^*=\left\{\begin{matrix}0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$ והיעקוביאן הוא כרגיל r.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \left(1-2r^2\cos\theta\sin\theta\right)r\cdot dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r - 2r^3\cos\theta\sin\theta \, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r - r^3 \sin 2\theta \, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}}$$

כעת, נותר לחשב את האינטגרל המסילתי על C_1, C_2

פרמטריזציה של C_1 היא $C_1: (0,t) \quad t: 1 \to 0$

ונחשב:

$$\int_{C_1} (\tan x + xy^2)\, dx + (x + \cos \pi y)\, dy = \int_1^0 0 + \cos \pi t \, dt$$

$$= \frac{\sin(\pi t)}{\pi}\Big]_1^0 \boxed{= 0}$$

פרמטריזציה של C_2 היא $C_2: (t,0) \quad t: 0 \to 1$

$$\int_{C_2} (\quad) dx + (\quad) dy = \int_0^1 \tan t \, dt = -\int_0^1 \frac{-\sin t}{\cos t} dt$$

$$= -\ln(|\cos t|)\Big|_0^1 = \boxed{-\ln \cos 1}$$

ולכן בסה"כ:

$$\int_{C \cup C_1 \cup C_2} = \int_C + \int_{C_1} + \int_{C_2}$$

$$\Rightarrow \int_C = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - 0 - (-\ln(\cos 1)) \boxed{= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} + \ln(\cos 1)}$$

Scanned by CamScanner

רביב

7. א.

$$\iint_S (x+y+z)\,dS$$

כאשר S הוא חלק המישור $x+2y+4z=4$

כאשר $x,y,z\geq 0$.

פתרון: המשטח מוגדר ע"י פונקציה: $z=f(x,y)=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$

ולכן אלמנט השטח הוא $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}$

$f_x=-\frac{1}{4},\ f_y=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}}=\boxed{\frac{\sqrt{21}}{4}}$

פונק' הצפיפות היא $\rho(x,y,z)=x+y+z$ ולכן

~~$\rho(x,f(x,y))=\rho(x,y,f(x,y))$~~ $=\rho(x,y,f(x,y))=1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}$

ולכן האינטגרל הוא: $\iint_S (x+y+z)\,dS=\iint_D \left(1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}\right)\frac{\sqrt{21}}{4}\,dx\,dy$

כאשר D הוא ההטלה של S למישור xy.

ההטלה של המישור $x+2y+4z=4$ למישור xy היא החלק של הרביע הראשון במישור שמתחת לישר $x+2y-4=0$

ובמילים אחרות: $D=\{0\leq x\leq 4-2y,\ 0\leq y\leq 2\}$

$$=\int_0^2\int_0^{4-2y}\left(1+\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}\right)\frac{\sqrt{21}}{4}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2 \left[\frac{3x^2}{2}+2yx+4x\right]_0^{4-2y} dy$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2 \frac{3}{2}(4-2y)^2+2y(4-2y)+4(4-2y)\,dy=$$

$$\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2 \frac{3}{2}(16-16y+4y^2)+8y-4y^2+16-8y\,dy=\int_0^2 2y^2-24y+40\,dy\left(\frac{\sqrt{21}}{16}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{16}\left(\frac{2y^3}{3}-\frac{24y^2}{2}+40y\right)\Bigg]_0^2=\frac{\sqrt{21}}{16}\cdot\frac{112}{3}=\boxed{\frac{7\sqrt{21}}{3}}$$

7. ד.

$$\iint_S z^2\,ds$$

S הוא שטח פנים של חרוט, ולכן נחלק את המשטח שלנו לשני משטחים: S_1 - הכיסוי, S_2 - המעטפת.

על הכיסוי S_1, $z=2$ ולכן האינטגרל הוא

$$\iint_{S_1} z^2\,ds = \iint_{S_1} 2^2\,ds = 4\iint_{S_1} ds$$

אינטגרל כזה מחשב את שטח S_1 ולכן, כיוון ש-S_1 הוא מעגל ברדיוס 2, נקבל

$$= 4\cdot(4\pi) = \boxed{16\pi}$$

על המעטפת S_2, המשטח מוגדר בצורה מפורשת כ- $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

נחשב נגזרות חלקיות: $f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ונקבל כי אלמנט השטח הוא

$$\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$$

פונקצית הצפיפות היא $\rho(x,y,z)=z^2$ ולכן $\rho(x,y,f(x,y)) = x^2+y^2$

והאינטגרל הנו:

$$\iint_{S_2} z^2\,ds = \iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dx\,dy$$

כאשר D הוא ההטלה של החרוט למישור xy - כלומר עיגול ברדיוס 2.

נעבור לקורדינטות קוטביות: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$0\le z\le 2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}=r$ ולכן $0\le r\le 2$

ו- $0\le\theta\le 2\pi$, והיעקוביאן הוא r.

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\sqrt{2}\cdot r\,dr\,d\theta = 2\sqrt{2}\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \boxed{8\sqrt{2}\pi}$$

ובסה"כ נקבל:

$$\iint_S z^2\,ds = \iint_{S_1} z^2\,ds + \iint_{S_2} z^2\,ds = \boxed{16\pi + 8\sqrt{2}\pi}$$

8.(a)

$\iint_S F\cdot \vec{n}\, ds$ $\qquad F=(x,-1,z)$

S נתון ע״י $z=x\cos y$, $x\in[0,1]$, $y\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$

פתרון: המשטח S ניתן להצגה. פרמטריזציה של היא:

$$\phi(x,y)=(x,y,x\cos y)$$

וקטורי הנגזרת הם:

$$\phi_x=(1,0,\cos y),\ \phi_y=(0,1,-x\sin y)$$

ולכן הנורמל למשטח הוא:

$$\vec{n}=\phi_x\times\phi_y=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & \cos y\\ 0 & 1 & -x\sin y\end{vmatrix}=(-\cos y,\ x\sin y,\ 1)$$

$$F(\phi(x,y))=F(x,y,x\cos y)=(x,-1,x\cos y)$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\,ds=\iint_D (x,-1,x\cos y)(-\cos y,\ x\sin y,\ 1)$$

$$=\iint_D -x\cos y-x\sin y+x\cos y\,dx\,dy=\iint_D -x\sin y\,dx\,dy$$

D הוא המלבן $D=[0,1]\times[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}]$ ולכן

$$=\int_0^1\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} -x\sin y\,dy\,dx=-\int_0^1 x\cos y\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}=-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\frac{x^2}{2}\Big]_0^1$$

הסימן מינוס - החלפתי סדר באינטגרל.

$$\boxed{=-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)}$$

8) ד) נחשב נורמל למשטח:

וקטורי הנגזרות הם $r_u=(0,0,1)$, $r_v=(-\sin v,\cos v,0)$

ולכן

$$\vec{n}=r_u\times r_v=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 0 & 1\\ -\sin v & \cos v & 0\end{vmatrix}=(-\cos v,-\sin v,0)$$

$$F(r(u,v))=F(\cos v,\sin v,u)=(\sin v,\cos v,u)$$

ולכן האינטגרל הוא:

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\,ds=\iint_D(\sin v,\cos v,u)(-\cos v,-\sin v,0)=\iint_D -2\sin v\cos v\,du\,dv$$

התחום הוא $D=\{u\in[0,2],\ v\in[\frac{\pi}{2},\pi]\}$ ולכן:

$$=\int_0^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-2\sin v\cos v\,dv\,du=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin 2v\,dv=2\left(\frac{\cos 2v}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=\cos 2\pi-\cos\pi\boxed{=2}$$

9

ניתן לחשב באמצעות פרמטריזציה של הספירה בקורדינטות כדוריות: $r(\psi,\theta) = (a\cos\psi\sin\theta,\ a\sin\psi\sin\theta,\ a\cos\theta)$

אך אני אחשב לפי משפט גאוס.

$$\operatorname{div}F = (3x^2+3y^2+3z^2)$$

ולכן

$$\iint_S F\cdot\vec{n}\,ds = \iiint_G (3x^2+3y^2+3z^2)\,dx\,dy\,dz$$

כאשר G הוא הספירה. נעבור לקורדינטות כדוריות:

$$x = r\sin\theta\cos\psi,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad z = r\cos\theta$$

כאשר $r\in[0,a]$, $\theta\in[0,\pi]$, $\psi\in[0,2\pi]$.

היעקוביאן הוא $J = r^2\sin\theta$ ולכן:

$$\iiint_G 3(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_G r^2(\sin^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\theta)\,r^2\sin\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} r^4\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\psi = 3\cdot 2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta\cdot\frac{r^5}{5}\Big]_0^a$$

$$= \frac{6\pi a^5}{5}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} = \boxed{\frac{12\pi a^5}{5}}$$

נשתמש במשפט סטוקס. 10

במקרה זה: $P = y+2z \; , \; Q = x+2z \; , \; R = x+2y$

המשטח S נמצא על המישור $x+2y+2z=0$ ונורמל היחידה למישור הוא

$$\vec{n} = \frac{(1,2,2)}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3}(1,2,2)$$

כמו כן, $\nabla \times F = (2-2,\, 2-1,\, 1-1) = (0,1,0)$

ולכן האינטגרל הוא

$$\int_C (y+2z)\,dx + (x+2z)\,dy + (x+2y)\,dz = \iint_S (0,1,0)(1,2,2)\frac{1}{3}\,ds$$

$$= \frac{2}{3}\iint_S ds$$

אינטגרל כזה מחשב את שטח המשטח שכולא העקומה C.
C היא חיתוך של מישור עם הספירה. חיתוך כזה הוא מעגל, וכיוון שהמישור עובר בראשית הצירים רדיוס המעגל הוא מקסימאלי - כלומר כמו רדיוס הספירה.

במקרה שלנו הרדיוס הוא 1 ולכן שטח המעגל הוא π

וסה"כ נקבל: $= \frac{2}{3}\iint_S ds = \boxed{\frac{2}{3}\pi}$