מערך תרגול 11

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תזכורת 1

א. העתקת ווינגרטן היא העתקה לינארית $W_p : T_p \to T_p$ המיוצגת בבסיס $\{x_1, x_2\}$ ע"י המטריצה $\left(L^i{}_j\right)$. העתקת ווינגרטן צמודה לעצמה לכן הערכים העצמיים שלה ממשיים. הם מסומנים k_1, k_2 ונקראים העקמומיות הראשיות. מתקיים $K = k_1 k_2$.

ב. אם $v \in T_p$ וקטור עצמי מנורמל המתאים לעקמומיות הראשית k, ו־ $\beta(s)$ גאודז המקיים $\beta(0) = p,\ \beta'(0) = v$ אז $k_\beta(0) = |k|$.

ג. עקמומיות ממוצעת H של משטח בנקודה היא

$$H = \frac{1}{2}Tr(W_p) = \frac{1}{2}L^i{}_i = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

ד. משטח נקרא מינימלי אם $H = 0$ בכל נקודה, כלומר $k_1 + k_2 = 0$ בכל נקודה.

תרגיל 1 (תיקון) בסוף תרגול שעבר חישבנו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה והשניה של הטורוס $x(\theta, \phi) = ((\cos\phi + 2)\cos\theta, (\cos\phi + 2)\sin\theta, \sin\phi)$:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (\cos\phi + 2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (L_{ij}) = \begin{pmatrix} -(\cos\phi + 2)\cos\phi & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

כעת נמצא את מקדמי העתקת ווינגרטן ואת עקמומיות גאוס.

פתרון 1

$$\begin{aligned} L^i{}_j &= -g^{ik}L_{kj} \\ &= -\begin{pmatrix} (\cos\phi + 2)^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(\cos\phi + 2)\cos\phi & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\cos\phi}{\cos\phi + 2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר $K(\theta,\phi)=det({L^i}_j)=\frac{\cos\phi}{\cos\phi+2}$.
נשים לב למשמעות הגאומטרית: עקמומיות גאוס 0 כאשר $\phi=\frac{\pi}{2}$ ו־ $\phi=\frac{3\pi}{2}$, עקמומיות גאוס חיובית כאשר $\frac{-\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$, ועקמומיות גאוס שלילית כאשר $\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{3\pi}{2}$.

תרגיל 2

א. חשבו את העקמומיות הראשיות k_1,k_2, את עקמומיות גאוס K ואת העקמומיות הממוצעת H עבור מישור.

ב. כנ"ל, עבור חרוט.

ג. כנ"ל, עבור הגרף של הפונקציה $f(x,y)=xy$ בנקודה הקריטית $(0,0,0)$.

פתרון 2

א. ראינו כי עבור מישור

$$\left({L^i}_j\right)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

כלומר $k_1=k_2=K=H=0$.

ב. ראינו כי עבור החרוט $x(u^1,u^2)=(u^2\cos u^1,u^2\sin u^1,u^2)$ מקדמי העתקת ווינגרטן הם

$$\left({L^i}_j\right)=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2u^2}&0\\0&0\end{pmatrix}$$

כלומר עבור $u^2>0$ מתקיים $k_1=\frac{\sqrt{2}}{2u^2},k_2=0,K=0,H=\frac{\sqrt{2}}{4u^2}$.

ג.

$$H_f=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

כלומר בגלל ש־ $(0,0,0)$ נקודה קריטית של $f(x,y)$ מתקיים שבנקודה זו

$$\left({L^i}_j\right)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם ±1, $k_{1,2}=\pm1$, כלומר

$$K=k_1k_2=-1$$
$$H=\frac{1}{2}\left(k_1+k_2\right)=0$$

תרגיל 3 נסתכל על משטח הסיבוב המתקבל ע"י סיבוב של הפרבולה $x = z^2 + \frac{1}{4}$ מסביב לציר z.

א. מיצאו את התבנית היסודית הראשונה.

ב. מיצאו את התבנית היסודית השניה.

ג. מיצאו את מקדמי העתקת ווינגרטן $\left(L^i{}_j\right)$.

ד. מיצאו את עקמומיות גאוס K ואת עקמומיות ממוצעת H.

פתרון 3

א. משטח סיבוב של $\left(\phi^2 + \frac{1}{4}, 0, \phi\right) = (r(\phi), 0, z(\phi))$:

$$x(\theta,\phi) = \left(\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)\cos\theta, \left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)\sin\theta, \phi\right)$$

מטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)^2 & 0 \\ 0 & 4\phi^2 + 1 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{cases} x_1 = \left(-\sin\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), \cos\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), 0\right) \\ x_2 = (2\phi\cos\theta, 2\phi\sin\theta, 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} = \left(-\cos\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), -\sin\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), 0\right) \\ x_{12} = (-2\phi\sin\theta, 2\phi\cos\theta, 0) \\ x_{22} = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0) \end{cases}$$

כעת,

$$x_1 \times x_2 = \left(\cos\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), \sin\theta\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right), -2\phi\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)\right)$$

וקטור זה מקביל ל־ $(\cos\theta, \sin\theta, -2\phi)$ לכן הנורמל הוא

$$n = \left(1 + 4\phi^2\right)^{-\frac{1}{2}}(\cos\theta, \sin\theta, -2\phi).$$

כלומר

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_{11}, n\rangle & \langle x_{12}, n\rangle \\ \langle x_{12}, n\rangle & \langle x_{22}, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \left(\phi^2 + \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

ג. כזכור $L^i{}_j = -g^{ik}L_{kj}$. אצלנו

$$\begin{aligned}(L^i{}_j) &= -\begin{pmatrix}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{-2} & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & \left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}} & 0\\ 0 & \frac{-1}{4}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ד.

$$K = \left(\frac{1}{2}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\right)\left(\frac{-1}{4}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{-1}{8}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{-3}$$
$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}} - \frac{1}{4}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{1}{8}\left(\phi^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{-3}{2}}$$

תזכורת 2

א. נאמר שהפרמטריזציה $x(u^1,u^2)$ היא בקואורדינטות איזותרמיות אם $(g_{ij}) = f^2\delta_{ij}$.

ב. הלפלסיאן של $g(u^1,u^2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הוא $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{(\partial u^1)^2}+\frac{\partial^2 g}{(\partial u^2)^2}$.

ג. משטח $x(u^1,u^2) = (x^1(u^1,u^2),x^2(u^1,u^2),x^3(u^1,u^2))$ הנתון בקואורדינטות איזותרמיות הוא מינימלי אם ורק אם $\Delta x = 0$, כלומר, $\Delta x^1 = \Delta x^2 = \Delta x^3 = 0$.

תרגיל 4 יהי $a\neq 0$. הוכיחו שהמשטח הנתון ע"י

$$x(u,v) = (a\sinh v\cos u, a\sinh v\sin u, au)$$

הוא משטח מינימלי.

פתרון 4

$$\begin{cases}x_1 = (-a\sinh v\sin u, a\sinh v\cos u, a)\\ x_2 = (a\cosh v\cos u, a\cosh v\sin u, 0)\end{cases}$$

מקדמי המטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix}a^2(\sinh^2 v+1) & 0\\ 0 & a^2\cosh^2 v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2\cosh^2 v & 0\\ 0 & a^2\cosh^2 v\end{pmatrix}$$

כלומר הקואורדינטות איזותרמיות. לכן, המשטח מינימלי אמ"מ $\Delta x = x_{11} + x_{22} = \vec{0}$. אכן,

$$\begin{cases} x_{11} = (\cos\theta\cosh\phi, \sin\theta\cosh\phi, 0) \\ x_{22} = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, 0) \end{cases}$$

כלומר $x_{11} + x_{22} = \vec{0}$, לכן המשטח מינימלי, כדרוש.

תזכורת 3 יש לנו את הנוסחאות הבאות עבור עקמומיות גאוס K:

$$\begin{aligned} K &= det(L^i{}_j) \\ &= L^1{}_{[1} L^2{}_{2]} \\ &= \frac{det(L_{ij})}{det(g_{ij})} \\ &= -\frac{2}{g_{11}} L_{1[1} L^2{}_{2]} \\ &= \frac{2}{g_{11}} \left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1} \Gamma^2_{2]j} \right) \end{aligned}$$

בפרט הנוסחא האחרונה מראה שניתן לחשב את עקמומיות גאוס רק ממקדמי g_{ij}. זהו ה־ $Theorema\ Egregium$.

תרגיל 5 בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$ נתון משטח בעל המטריקה

$$(g_{ij}(x,y)) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

עבור $y > 0$. מיצאו את עקמומיות גאוס.

פתרון 5 ראשית נמצא את סמלי גמא. גורם קונפורמי $\lambda(x,y) = y$, נגזרותיו $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. לכן

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\ \Gamma^1_{22} &= \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\ \Gamma^1_{12} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y} \\ \Gamma^2_{11} &= \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{2y} \\ \Gamma^2_{22} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{2y} \\ \Gamma^2_{12} &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0 \end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)\\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + \Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right)\\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right)\\
&= \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2y^2} - 0 + 0 - \left(\frac{1}{2y}\right)\left(\frac{-1}{2y}\right) + \left(\frac{-1}{2y}\right)\left(\frac{1}{2y}\right) - 0\right)\\
&= \frac{1}{2y^3}
\end{aligned}$$

תרגיל 6 לבטא ע"י המקדמים $g_{ij}, L_{ij}, {L^i}_j, \Gamma^k_{ij}$ ולפשט ככל הניתן:

א. $\langle x_{ij}, n_k\rangle {\delta^k}_m g^{m\ell}$

ב. $\langle n_i, n_j\rangle$

פתרון 6

א. סכימה m, k, חפשיים ℓ, i, j.

$$\begin{aligned}
\langle x_{ij}, n_k\rangle {\delta^k}_m g^{m\ell} &= \langle x_{ij}, n_k\rangle g^{k\ell}\\
&= \langle \Gamma^a_{ij}x_a + L_{ij}n, n_k\rangle g^{k\ell}\\
&= \left(\Gamma^a_{ij}\overbrace{\langle x_a, n_k\rangle}^{L_{ak}} + L_{ij}\overbrace{\langle n, n_k\rangle}^{0}\right) g^{k\ell}\\
&= \Gamma^a_{ij}L_{ak}g^{k\ell}\\
&= \Gamma^a_{ij}\left(g^{\ell k}L_{ka}\right)\\
&= -\Gamma^a_{ij}{L^\ell}_a
\end{aligned}$$

ב.

$$\begin{aligned}
\langle n_i, n_j\rangle &= \langle {L^k}_i x_k, {L^\ell}_j x_\ell\rangle\\
&= {L^k}_i {L^\ell}_j \langle x_k, x_\ell\rangle\\
&= {L^k}_i {L^\ell}_j g_{k\ell}\\
&= {L^k}_i\left(g_{k\ell}{L^\ell}_j\right)\\
&= -{L^k}_i L_{kj}
\end{aligned}$$

תרגיל 7 הוכיחו שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k}\left(\Gamma_{ij}^{\ell}x_{\ell}+L_{ij}n\right)$ הוא סימטרי באינדקסים j ו־ k.

פתרון 7 $\Gamma_{ij}^{\ell}x_{\ell}+L_{ij}n=x_{ij}$, כלומר צריך להראות ש־ x_{ijk} סימטרי באינדקסים j,k.
אך זה ידוע לפי שוויון נגזרות מעורבות (משפט קלירו) כי

$$x_{ijk}=\left(x_i\right)_{jk}=\left(x_i\right)_{kj}.$$