13/11/17

נוסחאות בייס:

בהינתן שני מאורעות A,B אז: $P(A|B)=P(B|A)\frac{P(A)}{P(B)}$

<u>הוכחה:</u>

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\cdot\frac{P(A)}{P(A)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\cdot\frac{P(A)}{P(B)}=P(B|A)\cdot\frac{P(A)}{P(B)}$$

סטטיסטיקה בייסיאנית:

מבצעים ניסויים ובהדרגתיות מעדכנים את האמונה שלנו לגבי ההשערה בעזרת נוסחאות בייס.

<u>דוגמא:</u>

נניח שבמגירה יש שני מטבעות: אחד מטבע הוגן: 0 או 1 בהסתברויות שוות, השני מטבע מוטה (מאוד): תמיד נופל על 1.

שולפים מהמגירה מטבע באקראי. נרצה לדעת האם המטבע הוא $\underbrace{\text{המוטה}}_{\text{השערה 1}}$ או $\underbrace{\text{ההוגן}}_{\text{השערה 2}}$.

← בגלל ששלפנו את המטבע באקראי תחילה שתי ההשערות סבירות באותה מידה: $P(\text{הוגן})=P(\text{מוטה})=\frac{1}{2}$. כעת נטיל את המטבע שוב ושוב וכל שיצא 1, הסבירות של ההשערה "מוטה" תעלה. ברגע שיצא 0, הסבירות של ההשערה "הוגן" תהיה מוחלטת. [סבירות: likleyhood]

← נשתמש בנוסחאות בייס: נניח שבהטלה הראשונה יצא 1

$$P(\text{הוגן}|1)=\underbrace{P(1|\text{הוגן})}_{0.5}\cdot\frac{P(\text{הוגן})}{P(1)} \Rightarrow 0.5\cdot 0.5\cdot\frac{1}{P(1)}=\frac{1}{3}$$

הסבירות של "הוגן" אחרי הטלה 1 - המצב החדש.

הסיכוי שיצא בלי תלות המטבע הנבחר.

הסבירות הקודמת, המצב הישן.

נחשב את $P(1)$ בעזרת נוסחאות ההסתברות השלמה

$$\Rightarrow P(1)=P(1|\text{הוגן})P(\text{הוגן})+P(1|\text{מוטה})P(\text{מוטה})=0.5\cdot 0.5+1\cdot 0.5=\underline{0.75}$$

← בעזרת חישוב דומה (או בעזרת הנוסחא $P(A^c)=1-P(A)$) נסיק ש: $P(\text{מוטה}|1)=\frac{2}{3}$.

עברנו מהסתברות שווה לשתי ההשערות לכך שמוטה סבירה פי 2.

אם מטילים שוב:

$$P(\text{הוגן}|1\wedge 1)=P(\underset{\text{הטלה 2}}{1}|\underset{\text{הטלה 1}}{1}\wedge\text{הוגן})\cdot\frac{P(\text{הוגן}|1)}{P(1)}=0.5\cdot\frac{\frac{1}{3}}{0.75}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{5}$$

$$P(1)=0.5\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

הסתברות הוגן. הסתברות מוטה

הסתברות של הוגן: $\frac{1}{2}\xrightarrow{\text{הטלה}}\frac{1}{3}\xrightarrow{\text{הטלה}}\frac{1}{5}\rightarrow\dots 0$.

← נניח שמתישהו יצא 0.

$$P(\text{מוטה}|0)=P(0|\text{מוטה})\cdot\boxed{\frac{P(\text{מוטה})}{P(0)}}=0$$

"מוטה" לא נופל על 0.

לא מעניין

<u>הערה:</u> בד"כ יש להשתמש בנוסחאות ההסתברות השלמה עבור המכנה כאשר משתמשים בבייס.

Scanned by CamScanner

משתנים מקריים: (מ"מ)

נניח שמטילים 3 מטבעות הוגנים. מרחב המדגם: $\{0,1\}^3=\{(x,y,z) \mid x,y,z \text{ 0 או 1}\}$

נניח שמעניינת אותנו השאלה "כמה מטבעות נפלו על 1?" (y)

אנו נדרש לעבוד עם מרחב מדגם מספיק כדי לענות על שאלה פשוטה.

← <u>פתרון:</u> נגדיר מ"מ (משתנה מקרי) מס' ה-1 שהתקבל בניסוי $= y$.

y - הוא מספר שתלוי בתוצאת הניסוי (פונקציה של התוצאות) ו-y מסכם את כל הדרוש עבורנו כדי לענות על השאלה.

← מה ההסתברות שיצאו 3 1-ים?

← מה ההסתברות ש- $y=3$?

⇐ ונחשב:

$$p(y=3)=p(\{(1,1,1)\})=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$
$$p(y=2)=p(\{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\})=\frac{3}{8}$$
$$p(y=1)=\frac{3}{8}$$
$$p(y=0)=\frac{1}{8}$$

$\Rightarrow p(\Omega)=\sum_{i=0}^{3}p(y=i)=1$

(תמיד מתקיים כי $p(\Omega)=1$).

<u>לסיכום:</u>

① מ"מ y הוא פונקציה מ-Ω אל $\mathbb{R}$

② המאורע $\{y=k\}$ הוא אוסף כל תוצאות הניסוי שעבורן מקבל ה-y המספר k.
(כלומר $\{y=k\}$ הוא התמונה ההפוכה של k ע"י y (קבוצת המקור של k)).

③ לכל תוצאה בניסוי y מקבל ערך כלשהו לכן $p(\Omega)=p\left(\bigcup_{k\in y(\Omega)}\{y=k\}\right)$

$y(\Omega)$ - התמונה של y - כל הערכים שהוא מקבל

$$=\sum_{k\in y(\Omega)}p(y=k) \overset{\text{זרים}}{\Longrightarrow} \sum_{k\in y(\Omega)}p(y=k)=1$$

(*) הערה לגבי השימוש בסימונים: היה חשוב מצבי (מ|מהאן)p:
ת-שבוע זה $p((מ|(מהאן))$ השבנו בשלבים-פשוט הוספנו את הטלה של 1 והשתמשנו במספרים שחושבו שלב קודם-עבור הטלה הראשונה.
מותר לחזור בשלבים: $p(A|B|C)=p(A|B\cap C)$.

<u>תרגיל למ"מ:</u>

נניח שאנחנו מטילים מטבע עם הסתברות p ל-1 שוב ושוב.

נגדיר מ"מ X - מס' ההטלות עד שיוצא 1 לראשונה.

נחשב את $p(X=k)$: מה ההסתברות שנטיל את המטבע k פעמים עד שיצא 1 לראשונה. ההסתברות שיצא 1 לפני שהטלנו היא 0. $[p(X=0)=0]$,
(כלומר 0 לא בתמונה של X).

13/11/17

המשך: התמונה של x: $1,2,3,\dots$

$$p(x=1)=p(\text{1 בהטלה הראשונה})=p$$

$$p(x=2)=p\left(\begin{smallmatrix}\text{0 ב-I}\\ \text{1 ב-II}\end{smallmatrix}\right)=P(\text{0 ב-I})P(\text{1 ב-II})=(1-p)p$$

התלות בג״

$$p(x=k)=p(\underbrace{000\dots00}_{\text{k-1 הטלות ראשונות}}\overset{\text{הטלה k}}{1})=(1-p)^{\boxed{k-1}}p$$

x נקרא מ״מ גאומטרי;

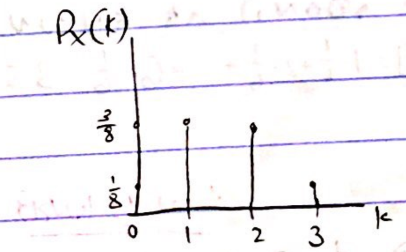
הגדרה:

אם X מ״מ בדיד (בתמונה של x יש מס׳ בן מניה של איברים) מסמנים את הפונקציה הבאה: $p_x(k):=p(x=k)$ ← p קטנה.

p_x היא פונקציה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ וקוראים לה "פונקציית ההתפלגות של x" ("פונקציית המסה של x" בספרות)

בדר״כ מציירים את p_x בגרף עמודות. למשל עבור מהדוגמה עם 3 המטבעות:

> ⊛ **הערה:** המקרה האחר (נראה רציף) ונעסוק בו לקראת סוף הקורס.



הגדרה עבור מ״מ כלשהו.

מגדירים את הפונקציה $F_x(t)$ כך: $F_x(t)=p(x\le t)$

היא נקראת פונקציית ההתפלגות המצטברת של x. למשל עבור הנ״ל:

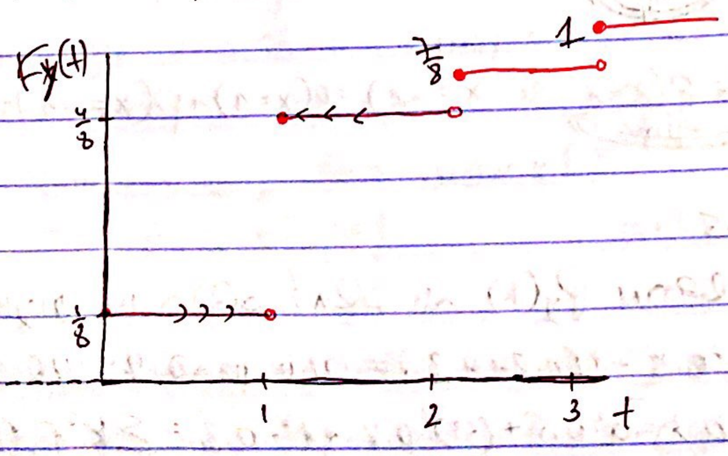
$$F_x(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ \frac{1}{8} & (0\le t<1) \\ \frac{4}{8} & (1\le t<2) \\ \frac{7}{8} & (2\le t<3) \\ 1 & (3\le t) \end{cases}$$

הסבר:

$$F_x(3.5)=p(x\le 3.5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)+p(x=3)=1$$

$$F_x(-2)=p(x\le -2)=p(\emptyset)=0$$

$$F_x(2.5)=p(x\le 2.5)=p(x=0)+p(x=1)+p(x=2)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}=\frac{7}{8}$$



טענות: לכל מ"מ X מתקיים

① $F_X(t)$ עולה (לא בהכרח ממש)

② $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0$; $\lim_{t\to\infty}F_X(t)=1$

③ $F_X(t)$ רציפה מימין.

תוחלת:

בהינתן מ"מ X, מסמנים ב- $E[X]$ את התוחלת שלו.
התוחלת (היא) הממוצע המשוקלל של ערכי X - המשוקלל ע"פ ההסתברות לקבל ערכים אלו. עבור מ"מ ~~X~~ בדיד:

$$E[X]=\sum_{k\in X(\Omega)}\overset{\text{מס'}}{k}\cdot \overset{\text{משקל}}{p_X(k)}=\sum_{k\in X(\Omega)}x\,P(X=k)$$

דוגמא:

מטילים קוביה הוגנת, מהי תוחלת המספר של הפאה שיצא למעלה? מסמנים את המספר ב-X.

$$P_X(k)=\frac{1}{6}\qquad k=1,2,\dots,6 \Rightarrow E[X]=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+\dots+6\cdot\frac{1}{6}=3.5$$

דוגמא נוספת:

עבור Y - מס' ה-1 ב-3 הטלות מטבע הוגן (מהדוגמא הקודמת)

$$E[Y]=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{12}{8}=1.5$$

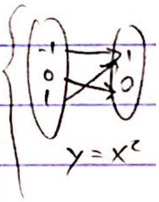
אם נחזור על הניסוי הרבה פעמים ובכל פעם נרשום את ערך Y המתאים - ממוצע המספרים שנקבל יהיה התוחלת של Y.

דוגמא:

נתון מ"מ X עם פונקציית ההתפלגות הבאה: $P_X(-1)=0.2$; $P_X(0)=0.5$; $P_X(1)=0.3$

נחשב את $E[X^2]$. (נגדיר $Y=X^2$, נחשב $P_Y(k)$ ונציב: $E[Y]=\sum_{k\in Y(\Omega)}kP_Y(k)$

נחשב $P_Y(k)$: התמונה של Y היא $\{0,1\}$ כי X מקבל רק את הערכים $\{-1,0,1\}$.



$$\Rightarrow P_Y(0)=P(Y=0)=\underbrace{P(X^2=0)=P(X=0)}_{\text{שקולים}}=P_X(0)=0.5$$

$$\to P_Y(1)=P(Y=1)=\underbrace{P(X^2=1)=P(X=1\ \text{או}\ X=-1)}_{\text{שקולים}}=P(X=1)+P(X=-1)=$$
$$P_X(1)+P_X(-1)=0.3+0.2=0.5$$

$$\Longrightarrow E[Y]=0\cdot0.5+1\cdot0.5=0.5$$

אנחנו לא רוצים לחשב את $P_Y(k)$ מחדש עבור כל פונקציה פשוטה של X: (למשל $Y=X^3$, $Y=X^4$, $Y=\ln X$)

ולמזלנו יש פתרון אחר: $E[X^2]=0\cdot0.5+1\cdot0.5=0\cdot0.5+1(0.2+0.3)=$

$$=E[X^2]=0\cdot0.5+1\cdot0.2+1\cdot0.3=0^2\cdot0.5+(-1)^2\cdot0.2+1^2\cdot0.3=\sum_{k\in X(\Omega)}k^2P_X(k)$$

כעת אין צורך לחשב את $P_Y(k)$ בכל פעם.

13/11/17

-המשך-

משפט: לכל $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מתקיים:

$$E[g(x)] = \sum_{k\in X(\Omega)} g(k)P_x(k)$$

← הערה: לפי הדוגמא הנ"ל (מפרקים מספרים שמגדירים ע"י הפונק' g לאיברים שונים בסכום). משפט זה מאפשר לחשב $E[g(x)]$ ללא חישוב פונקציית התפלגות נוספת. (בדר"כ זה מהיר ונוח יותר).

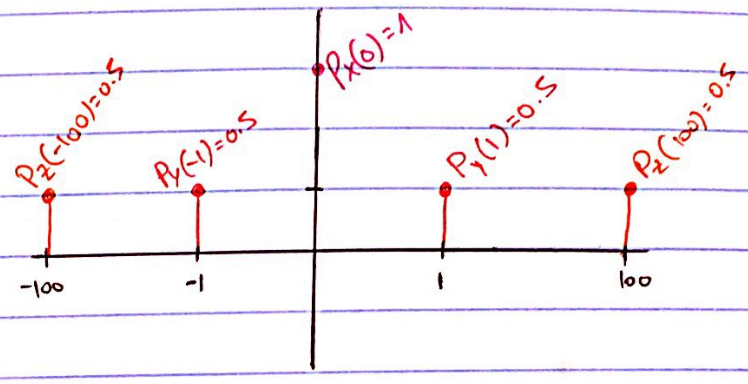
תרגילים (שונים) שונות

① חשבו את התוחלת של x,y,z:

$X: \ P_x(k)=1 \ ; k=0$

$Y: \ P_y(k)=0.5 \ ; k=1,-1$

$Z: \ P_z(k)=0.5 \ ; k=100,-100$



$E[x]=0\cdot 1=0$

$E[z]=(-100)\cdot 0.5+100\cdot 0.5=0$

$E[y]=1\cdot 0.5+(-1)\cdot 0.5=0$

← המסקנה: x,y,z הם מ"מ שונים מאוד זה מזה. אבל יש להם אותה תוחלת.
ורצה מדד נוסף מלבד התוחלת שיאפשר לנו להבדיל בין מ"מ.
אנו מחפשים מדד פיזור - שיענה על השאלה כמה רחוק מהתוחלת הערכים שהמ"מ מקבל נמצאים. אם נסמן את המדד ב-V, אנו רוצים שיתקיים: $V[x]<V[y]<V[z]$

לא מפוזר בכלל — מפוזר הכי הרבה.

הגדרה: השונות של מ"מ x (בדיד):

$$V[x]=E[(x-E[x])^2]$$

מספר קבוע שמחשבים מראש

למשל בדוגמאות הקודמות:

$V[x]=E[(x-\overset{0}{E[x]})^2]=E[(x-0)^2]=E[x^2]=0^2\cdot 1=0$

$V[y]=E[(y-\overset{0}{E[y]})^2]=E[y^2]=1^2\cdot 0.5+(-1)^2\cdot 0.5=1$

$V[z]=E[(z-E[z])^2]=E[z^2]=(100)^2\cdot 0.5+(-100)^2\cdot 0.5=10,000$

קיבלנו $V[x]<V[y]<V[z]$ כפי שרצינו.