דטרמיננטות

אנחנו מדברים רק על מטריצות ריבועיות בנושא הזה
הגדרה: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. ו$i, j \in \{1, ..., n\}$. נגדיר את המינור ה$i, j$ של המטריצה A, ונסמן אותו ב$M^A_{i,j}$, להיות המטריצה שמתקבל מA כשמוחקים מA את השורה הi והעמודה הj.
דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

נשים לב שאנחנו תמיד נקבל מטריצה מגודל $n-1 \times n-1$.
הגדרה: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, הדטרמיננטה של A, מסמנים $|A|$, או $\det A$, זה איזשהו מספר שמתאימים למטריצה.
מחשבים את המספר הזה בצורה הבאה:
נבחר איזשהי שורה i של A.

$$|A| = (-1)^{i+1}A_{i,1}|M^A_{i,1}|+(-1)^{i+2}A_{i,2}|M^A_{i,2}|+(-1)^{i+3}A_{i,3}|M^A_{i,3}|+...+(-1)^{i+n}A_{i,n}|M^A_{i,n}|$$

בקיצור:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{i,j}|M^A_{i,j}|$$

מקרה בסיס: מטריצה מגודל 1×1, היא מהצורה (a). הדטרמיננטה שלה היא a.
דוגמאות:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמייננטה של A.
נבחר את השורה הראשונה.

$$|A| = (-1)^{1+1}A_{1,1}|M^A_{1,1}| + (-1)^{1+2}A_{1,2}|M^A_{1,2}|$$

$$|A| = a\cdot d - b\cdot c$$

קיבלנו נוסחא כללית לדטרמיננטה של מטריצה 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

דוגמא נוספת:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

נבחר את השורה הראשונה.

$$|A| = (-1)^{1+1} A_{1,1} |M^A_{1,1}| + (-1)^{1+2} A_{1,2} |M^A_{1,2}| + (-1)^{1+3} A_{1,3} |M^A_{1,3}|$$

$$|A| = 1 \cdot | \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} | - 2 | \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} | + 3 \cdot | \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} |$$

$$|A| = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) =$$

$$|A| = 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 - 2 \cdot (-6) + 3(-3) =$$

$$-3 + 12 - 9 = 0$$

הערה: ניתן לחשב את הדטרמיננטה באותו אופן, כאשר במקום לקבע שורה ולרוץ על כל העמודות, מקבעים עמודה ורצים על כל השורות.
כלומר, נבחר עמודה j.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} |M^A_{i,j}|$$

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

נבחר את העמודה הראשונה.

$$|A| = (-1)^{1+1} A_{1,1} |M^A_{1,1}| + (-1)^{2+1} A_{2,1} |M^A_{2,1}| + (-1)^{3+1} A_{3,1} |M^A_{3,1}|$$

$$|A| = 1 \cdot |\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}| - 4|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}| + 7|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}|$$

ניתן לחשב עד הסוף ולראות שמגיעים ל0.
הערה: אם במטריצה יש שורה או עמודה עם הרבה אפסים, עדיף לבחור לפתח לפי השורה/העמודה הנ"ל.
דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

נפתח לפי העמודה הראשונה:

$$|A| = (-1)^{1+1}1|\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}| + (-1)^{2+1}0|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}| + (-1)^{3+1}0|\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}| = 2$$

מסקנה: $|A| = |A^t|$.
טענה: הדטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונית (כלומר מטריצה שמתחת לאלכסון כל האיברים שווים ל0) שווה למכפלת איברי האלכסון.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * & * \\ 0 & a_{2,2} & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

הוכחה: נוכיח את הטענה באינדוקציה על גודל המטריצה- n.
בסיס האינדוקציה: $n = 1$:

$$A = (a_{1,1})$$

$$|A| = a_{1,1}$$

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה לאיזשהו n, ונוכיח שהיא נכונה ל$n + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * & * & * \\ 0 & a_{2,2} & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

נפתח את הדטרמיננטה לפי העמודה הראשונה.

$$|A| = (-1)^{1+1}a_{1,1}|M_{1,1}^A| + 0 + 0 + +... + 0$$

$$|A| = a_{1,1}\left|\begin{pmatrix} a_{2,2} & * & * & * \\ 0 & \ddots & * & * \\ 0 & 0 & a_{n,n} & * \\ 0 & 0 & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}\right| = a_{1,1}(a_{2,2}\cdots a_{n,n}\cdot a_{n+1,n+1})$$

המינור יצא מטריצה משולשית מגודל $n\times n$, ולכן יכולנו להפעיל את הנחת האינדוקציה ולהגיד שהדטרמיננטה שלו היא מכפלת איברי האלכסון.

איך פעולות דירוג משפיעות על הדטרמיינטה?

.1

$$A \xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j} B$$

$$|B| = (-1)|A|$$

.2

$$A \xrightarrow{R_i \to \alpha R_i} B$$

$$|B| = \alpha|A|$$

3. הפעולה השלישית, הוספת כפולת שורה לשורה, לא משנה את הדטרמיננטה.

אלגוריתם לחישוב דטרמיינטה של מטריצה:

נדרג עד שנגיע למטריצה משולשית. נחשב את הדטרמיננטה של המטריצה המשולשית בקלות.

על כל החלפת שורה שעשינו, נכפיל את הדטרמיננטה הסופית במינוס 1.

על כל סקלר שהכפלנו בדרך- עכשיו נחלק בו.

ונקבל את הדטרמיננטה של המטריצה המקורית.

לדוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשבו את $|A|$.

נדרג:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 0.5R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 3R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 + 3R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה של המטריצה הסופית היא 1. (זאת מטריצה משולשית, אז מכפילים את איברי האלכסון). עשינו 3 החלפות שורה בדרך, לכן צריך להכפיל ב$-1 = (-1)^3$.
בנוסף, הכפלנו בחצי, אז כעת אנחנו צריכים לחלק בחצי, כלומר להכפיל ב2.

$$|A| = -2$$

תכונות הדטרמיננטה:

1. הדטרמיננטה היא כיפלית. כלומר,

$$|AB| = |A||B|$$

2. מסקנה מתכונה 1:

$$|A^n| = |A|^n$$

הסבר:

$$|A^n| = |A \cdot A \cdots A| = |A| \cdot |A| \cdots |A| = |A|^n$$

3. A הפיכה אמ"ם $|A| \neq 0$.
4. מסקנה: אם A הפיכה,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

הוכחה:

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$$|AA^{-1}| = |I|$$

I היא מטריצה משולשית. ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון, שווים כולם ל1, כלומר שווה 1.

$$|AA^{-1}| = 1$$

$$|A||A^{-1}| = 1$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

תרגיל: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אנטיסימטרית, כאשר n איזוגי.
הוכיחו שA לא הפיכה.
(תזכורת: A נקראת אנטיסימטרית אם $A^t = -A$)
הוכחה: ראינו באמצע השיעור שלכל מטריצה, הדטרמיינטה שלה שווה לדטרמיננטה של השיחלוף שלה. לכן

$$|A| = |A^t|$$

במקרה שלנו:

$$A^t = -A$$

כלומר, קיבלנו:

$$|A| = |-A| = |(-I)A| = |(-I)||A| = (-1)^n|A| = -|A|$$

לכן

$$|A| = 0$$

וזה אומר שA לא הפיכה.
תרגיל: תהי A מטריצה מגודל $n \times n$. ו$k \in \mathbb{R}$. מה הקשר בין $|A|$ ל$|kA|$?
תשובה:

$$|kA| = |kIA| = |(kI)A| = |kI||A| = k^n|A|$$