

1. אם לקבוצה יש חסם עליון אז הוא יחיד.
2. אקסיומת החסם העליון: לכל קבוצה A כך ש- $\mathbb{R} \ni A \neq \emptyset$, יש חסם עליון.
3. אם $a = \sup A$ אז $a = \max A$.
4. $a = \sup A \Leftrightarrow (A \leq a \wedge \forall b < a: \exists x \in A: x > b)$.
5. אם לקבוצה יש חסם תחתון אז הוא יחיד.
6. אם $a = \min A$ אז $b = \inf A$.
7. $a = \inf A \Leftrightarrow (a < A \wedge \forall a < b \exists c \in A: c < b)$.
8. לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע יש חסם תחתון.
9. תכונת ארכימדס: $\forall \varepsilon > 0 \forall x \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot \varepsilon > x$ (לכל ε חיובי ו- x , קיים n טבעי כך ש- $n \cdot \varepsilon > x$).
10. לכל קבוצה $A \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל יש מקסימום.
11. צפיפות \mathbb{Q} ב- \mathbb{R} : בין כל שני מספרים ממשיים שונים יש מספר רציונלי.
12. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
13. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
14. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$.
15. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנת ויהי L הגבול שלה. יהיה $c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי הסדרה $\{ca_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $c \cdot L$.
16. תהיינה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות, יהיו M, L הגבולות שלהם בהתאמה כלומר $a_n \rightarrow L, b_n \rightarrow M$ אזי אם נגדיר $c_n = r \cdot a_n + s \cdot b_n$, הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $r \cdot L + s \cdot M$.
17. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אזי הקבוצה $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ חסומה (מלעיל ומלרע).
18. תהיינה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות לגבולות M, L בהתאמה, $c_n = a_n \cdot b_n$ אזי הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $M \cdot L$.
19. תהיינה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות ששואפות לאותו גבול L . כלומר, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$. תהי $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שלישית ונניח שקיים N , כל שלכל $n \geq N$ $a_n \leq c_n \leq b_n$ אזי בהכרח הסדרה $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לאותו גבול L .
20. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת עם גבול 0 , תהי $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה, אבל לא בהכרח מתכנסת, אזי הסדרה $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ לגבול 0 .
21. סדרה עולה חסומה מלעיל, אזי היא מתכנסת והגבול הינו החסם העליון $\sup\{a_n\}$. גם כן, כל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת וחסומה מלרע מתכנסת, הגבול הינו $\inf\{a_n\}$.
22. $a_n = q^n, 0 < q < 1$ אזי $a_n \rightarrow 0$.
23. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אזי $a_n \rightarrow 0$ אם ורק אם $|a_n| \rightarrow 0$.

24. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת. יהי L הגבול ונניח כי $L \neq 0$. אזי הסדרה $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ גם

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$$

25. אם $c > 0$ - אז $a_n \rightarrow \infty$ או $c \cdot a_n \rightarrow \infty$.

26. אם $a_n \rightarrow \infty$ והסדרה b_n חסומה, אז $a_n + b_n \rightarrow \infty$.

27. אם $a_n \rightarrow \infty$, אז $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$.

28. אם $0 < a_n \rightarrow 0$, אז $\frac{1}{a_n} \rightarrow \infty$.

29. אם הסדרה a_n עולה ואינה חסומה מלעיל, אז $a_n \rightarrow \infty$.

30. משפט בולצנו ויירשטראס: לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

31. קריטריון קושי להתכנסות סדרות: סדרה a_n היא מתכנסת \Leftrightarrow לכל $\varepsilon > 0$ יש N שאחריו

המרחק בין כל שני איברים בסדרה קטן מ- ε . (בפירוש: לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך ש

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ לכל } n, m < N.$$

32. אם $a_n \leq c$ לכל n , ומתקיים $a_n \rightarrow a$, אז $a \leq c$.

33. לכל סדרה a_n יש גבול חלקי גדול ביותר.

34. לכל סדרה חסומה b_n יש גבול חלקי גדול ביותר.

35. לכל סדרה יש גבול תחתון (במובן הרחב).

36. סדרה a_n מתכנסת במובן הרחב $\Leftrightarrow \overline{\lim}(a_n) = \underline{\lim} a_n$.

37. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $a_n \rightarrow 0$.

38. התכונות הבאות שקולות:

• הטור מתכנס.

• כל זנב של הטור מתכנס.

• יש לטור זנב שמתכנס.

39. שינוי, מחיקה, או הוספה של מספר סופי של מחוברים בטור אינם משפיעים על

התכנסותו/התבדרותו (אבל כן משנים את סכומו). [כי לאחר השינוי יהי N כך שהזנב r_N

של הטור החדש הוא זנב של הטור הישן (אולי מתחיל ממקום אחר)]

40. אם טור מתכנס אז זנבותיו מקיימים $r_m \rightarrow 0$ כ- $m \rightarrow \infty$. $S = S_m + r_m \rightarrow r_m \rightarrow 0$.

41. אם הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אזי $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$, ובפרט מתכנס.

42. אם $\sum(a_n - b_n)$ מתכנס, אז הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד.

43. אם $c \neq 0$, אז $\sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n$, אם אחד מהסכומים קיים.

44. אם $\sum a_n = \pm \infty$, $c > 0$, אז $\sum c \cdot a_n = \pm \infty$ ואם $c < 0$, אז $\sum c \cdot a_n = \mp \infty$.

45. מבחן השורש / קושי להתכנסות טורים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי, אזי:

(א) אם יש $0 < q < 1$ כך ש $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, מלבד מספר סופי של איברים, אז $\sum a_n < \infty$.

(ב) אם יש אינסוף n -ים כך ש $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, אז $\sum a_n = \infty$.

46. מבחן המנה להתכנסות טורים: יהי $\sum a_n$ טור חיובי. אם יש $0 < q < 1$ כך ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$

פרט למספר סופי של איברים אז הטור מתכנס.

47. עבור טורים חיוביים $\sum a_n$ ו $\sum b_n$. אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לבסוף אז:

(א) אם $\sum b_n < \infty$ אז $\sum a_n < \infty$.

(ב) אם $\sum a_n = \infty$ אז $\sum b_n = \infty$.

48. אם $\sum a_n$ טור חיובי המקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow c < 1$ אז $\sum a_n < \infty$ ואם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow c > 1$ אז $\sum a_n = \infty$.

49. עבור סדרה חיובית a_n , אם $1 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$ לבסוף, אז $a_n < a_{n+1}$ לבסוף, כלומר הסדרה

היא סדרה חיובית עולה, ולכן $a_n \rightarrow 0$.

50. לכל $a > 0$: $\sqrt[n]{a} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1$.

51. אם מתקיים התנאי של מבחן המנה אז מתקיים התנאי של מבחן השורש.

52. תהי (a_n) סידרה מונוטונית. אם קיימת תת סדרה (a_{m_n}) כך ש $a_{m_n} \rightarrow a$ במובן הרחב,

אז $a_n \rightarrow a$.

53. חוק הקיבוץ: הכנסת סוגריים בטור מתכנס במובן הרחב אינה משנה את סכומו. כלומר:

אם $\sum a_n$ מתכנס, אז לכל סדרה $1 = m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ מתקיים:

$$\sum (a_{m_k} + a_{m_{k+1}} + \dots + a_{m_{k+1}-1}) = \sum a_n$$

54. מבחן העיבוי: אם הסדרה a_n חיובית ויורדת, אז הטורים $\sum a_n$, $\sum 2^n \cdot a_{2^n}$ מתכנסים

ומתבדרים יחד.

55. $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

56. אם α ממשי, ו $a_n \rightarrow a$ ו- (a_n^α) מוגדרים) אז $a_n^\alpha \rightarrow a^\alpha$.

57. משפט לייבניץ: אם (a_n) יורדת לאפס, אזי:

(א) הטור $\sum (-1)^{n+1} a_n$ מתכנס.

(ב) שאריות הטור $\sum (-1)^{n+1} a_n$ מקיימות $|r_m| \leq a_{m+1}$ וסימנו, $(-1)^m$.

(אם במשפט הסדרה (a_n) יורדת ממש, בסעיף ב' נקבל $|r_m| < a_{m+1}$)

58. אם טור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס.

59. מבחן דיריכלה: יהיו $\sum b_n$ טור חסום, $a_n \rightarrow 0$ מונוטונית. אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

60. מספיק להוכיח כשהסדרה a_n יורדת ל-0. (אם $a_n \nearrow 0$ אז $-a_n \searrow 0$ ואז

$$(\sum (-a_n) b_n = -\sum a_n b_n$$

61. מבחן אבל: אם (a_n) מונוטונית וחסומה, ו- $\sum b_n$ מתכנס אז $\sum a_n b_n$ מתכנס ולכן חסום.

62. $\sum b_n$ מתכנס, ולכן חסום.

63. לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

א. $0 \leq p_n, q_n \leq |a_n|$

ב. $p_n + q_n = |a_n|$

ג. $p_n - q_n = a_n$

64. $\sum a_n$ מתכנס בהחלט $\Leftrightarrow \sum p_n, \sum q_n < \infty$. במקרה זה מתקיים: $\sum a_n = \sum p_n - \sum q_n$.

65. אם $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum p_n = \sum q_n = \infty$.

66. אם טור אי שלילי $\sum a_n$ מתכנס, אז לאותו סכום יתכנס הטור גם לאחר שינוי כרצוננו של

סדר איבריו. כלומר: לכל תמורה P על \mathbb{N} (=פונקציה חח"ע ועל $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$), $\sum a_{p(n)} = \sum a_n$.

67. חוק החילוף: אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט אז שינוי סדר איבריו לא משנה את סכומו.

68. יהי $\sum a_n$ טור. נניח שהטור $(a_{m_k} + \dots + a_{m_{k+1}-1})$ (המתקבל מטורנו ע"י הכנסת

סוגריים) מתכנס, והסימן של $a_{m_k}, \dots, a_{m_{k+1}-1}$ זהה לכל k . אזי הסרת הסוגריים אינה

משנה את סכום הטור: $\sum_{k=1}^{\infty} (a_{m_k} + \dots + a_{m_{k+1}-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$

69. אם $a_n \rightarrow a$ אז לכל סדרה $k_n \rightarrow \infty$ כש $k_n \in \mathbb{N}$ (לא בהכרח עולה) מתקיים $a_{k_n} \rightarrow a$.

70. משפט רימן: יהי $\sum a_n$ טור מתכנס בתנאי. אזי:

א. לכל $-\infty \leq s \leq \infty$, יש סידור מחדש של אברי הטור כך שסכומו יהיה s .

ב. יש גם סידור כך שהטור אינו מתכנס אפילו במובן הרחב.

71. אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים, אז

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j \right) = (\sum a_n)(\sum b_n)$$

72. אם $\sum a_n, \sum b_n$ מתכנסים בהחלט, אז הטור בסעיף 70 מתכנס בהחלט.

73. כשהטורים מתכנסים בהחלט, לא משנה סדר סכימת המכפלות, בפרט,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{n-1} a_i b_{n-i} = (\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$$

74. ניסוח הגבול על ידי היינה: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow a$ נקודת הצטברות של $dom(f)$ ולכל

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b \text{ מתקיים } a \neq \widetilde{a_n} \rightarrow a \in dom(f)$$

75. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים, אז הוא יחיד.

76. הסיבות האפשריות לאי קיום גבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (כאשר a נקודת הצטברות של $dom(f)$):

יש בתחום סדרה $a \neq a_n \rightarrow a$ כך שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ אינו קיים.

יש בתחום סדרות $a \neq a_n, a'_n \rightarrow a$ כך שהגבולות $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$.

77. $a < a_n \rightarrow a$ נקודת הצטברות מימין של התחום, ולכל סידרה $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

(יורדת ממש) $f(a_n) = b$. בדומה עבור $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$.

78. עבור $\lim_{x \rightarrow a} f(x) : a \in \mathbb{R}$ קיים $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Leftrightarrow$ (קיימים ושווים). במקרה זה,

כל הגבולות שווים.

79. מוסכמה: נקודות a בהן מחשבים את גבולות $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$ הן נקודות הצטברות של תחום

הפונקציה.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad .80$$

81. אם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ אזי:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c \quad .א$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c \quad .ב$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c} \quad .ג$$

כאשר הביטויים מימין מוגדרים היטב. (למשל: $c \neq 0$ בסעיף 3).

82. סנדוויץ': אם $b \xrightarrow{x \rightarrow a} f(x) \leq g(x) \leq h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ אזי $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

83. אם $b \xrightarrow{x \rightarrow a} f(x), b \neq c, g(x) \xrightarrow{x \rightarrow b} c$ נקודת הצטברות של $(\text{dom}(g) \cap \text{im}(f))$ אז

$$g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} c$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1 \quad .84$$

85. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של נקודה a . אם הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ קיים, אז יש סביבה

של a שבה הפונקציה f חסומה.

86. כל אחד מהתנאים הבאים שקול לרציפות f בנקודה a :

א. לכל $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$, כך ש: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ לכל x (בתחום) כך ש -

$$|x - a| < \delta \quad (\text{לא צריך להחריג את } x = a).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a + h) = f(a) \quad .ב$$

ג. לכל סידרה $a_n \rightarrow a$, מתקיים: $f(a_n) \rightarrow f(a)$. (לא נדרש ש- $a_n \neq a$ לכל n).

87. כל פולינום הוא פונקציה רציפה בכל נקודה (רעיון: כל פולינום מתקבל מהפונקציות

הרציפות x וקבועות, ע"י כפל וחיבור).

88. כל פונקציה רציונאלית (מנה של פולינומים), היא רציפה בכל נקודה a בה $g(a) \neq 0$.

89. אם $f(x)$ רציפה בנקודה a ו- $g(x)$ רציפה בנקודה $b = f(a)$ אז $g(f(x))$ רציפה ב- a .

90. אפשרויות לאי רציפות בנקודה – ראה [הרצאה 18](#).

91. תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה a . אם f רציפה בנקודה a ו- $0 < f(a)$, אז קיימת סביבה של a שבה $0 < f(x)$ (ובדומה עבור $f(a) < 0$).

92. f רציפה בנקודה $a \Leftrightarrow f$ רציפה מימין ומשמאל בנקודה a .

93. f רציפה בקטע $[a, b] \Leftrightarrow$ הפונקציה מצומצמת $f|_{[a,b]}$ מוגדרת ורציפה בכל נקודה בקטע $[a, b]$.

94. משפט ערך הביניים: אם f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, ו- $f(a) < d < f(b)$, אזי קיים $a < c_1 < b$ כך ש- $f(c_1) = d$.

(הערה: משפט ערך הביניים נכון גם כאשר $f(a) < d < f(b)$: נפעיל את המשפט הקודם על הפונקציה $-f$:

$-f(a) < -d < -f(b)$; רציפה בקטע $[a, b]$, לכן יש נקודה $a < c < b$ כך ש- $-f(c) = -d$ ולכן $f(c) = d$.

95. אם f רציפה בקטע $[a, b]$ ומחליפה סימן שם (כלומר, $f(a) < 0 < f(b)$ או $f(b) > 0 > f(a)$) אז f מקבלת את הערך 0 בנקודה כלשהי בקטע.

96. לכל פולינום ממעלה אי זוגית יש שורש (ממשי).

97. למת ויירשטרס: פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$, חסומה באותו קטע סגור $[a, b]$.

98. משפט ויירשטרס: פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.

99. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ אזי

$$\{f(x) : a \leq x \leq b\} = \left[\min_{x \in [a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x) \right]$$

100. אם f רציפה במידה שווה בתחום A , אזי לכל $a \in A$, כך שקיימת סביבה של a המוכלת ב- A , רציפה בנקודה a .

101. משפט קנטור: פונקציה רציפה בקטע סגור, רציפה במידה שווה שם.

102. פונקציה רציפה ומחזורית ב- \mathbb{R} , רציפה במידה שווה ב- \mathbb{R} .

f מחזורית אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x+c) = f(x)$ לכל x . דוגמה: $\sin(x)$

מחזורית. בפרט, $\sin(x)$ רציפה במידה שווה ב- \mathbb{R} .

103. פונקציה עולה ממש היא פונקציה חד-חד ערכית.

104. הפונקציה ההפוכה לפונקציה עולה ממש היא פונקציה עולה ממש.

105. אם f עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[a, b]$, אזי $\text{Im}(f) = [f(a), f(b)]$, ואז f^{-1} מוגדרת על קטע סגור.

106. אם f עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[a, b]$, אזי f^{-1} עולה ממש ורציפה בקטע הסגור $[f(a), f(b)]$.

107. הפונקציה $f(x) = e^x$ מוגדרת לכל $x > 0$.

108. e^x עולה ממש.

109. f גזירה ב- $x \Leftrightarrow f'_+(x), f'_-(x)$ שווים וקיימים.

110. אם f גזירה בנקודה a , אז f רציפה בנקודה a .

$$(u + v)' = u' + v' \quad 111$$

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u \quad 112$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad 113$$

114. אם $v \neq 0$ (לפחות בסביבה של x), אז: $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad 115$$

116. אם f הפיכה בסביבת a ו- $f'(a)$ קיימת ושונה מאפס ו- f^{-1} רציפה ב- $f(a) := b$ אז

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) \text{ (מסמנים)}$$

117. כלל השרשרת: $(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot \overbrace{f'(x)}^{\text{הנגזרת הפנימית}}$

118. משפט פרמה: תהי c נקודת אקסטremום של f בקטע פתוח. אם $f'(c)$ קיימת, אז $f'(c) = 0$.

119. משפט רול: תהי f רציפה ב- $[a, b]$ וגזירה ב- (a, b) . אם $f(a) = f(b)$, אז יש $a < c < b$ כן ש- $f'(c) = 0$.

120. משפט הערך הממוצע (לגרנו): תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$ וגזירה בקטע (a, b) . יש $a < c < b$ כן ש- $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

121. משפט הערך הממוצע המוכלל (קושי): אם f, g רציפות בקטע $[a, b]$ וגזירות ב- (a, b) כך ש- $g'(x) \neq 0$, אז יש $a < c < b$ כן ש- $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

122. משפט דרבו: אם f גזירה ב- $[a, b]$, אז f' מקבלת כל ערך בין $f'_+(a)$ ל- $f'_-(b)$.

123. תהי f רציפה בסביבה של a וגזירה בסביבה המנוקבת של a . אזי:

$$\text{א. אם } b = \lim_{x \rightarrow a} f'(x), \text{ אז } f'(a) = b$$

$$\text{ב. כני"ל עבור } f'_+(a), f'_-(a).$$

124. אם f גזירה בקטע סגור אז נקודות אי הרציפות של f' (אם יש כאלה) הן תמיד מסוג שני (אחד הגבולות החד צדדיים לא קיים).

125. משפט לופיטל: יהי $\lambda \in \{0, \infty\}$, $a \in \mathbb{R} \cup \infty$. יהיו פונקציות f, g גזירות בסביבה

מנוקבת של a ומקיימות שם:

א. $g'(x) \neq 0$ לכל

ב. $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda$

ג. $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

אזי: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} b$

הערה: לופיטל נכון גם עבור גבולות חד-צדדיים.

■