

תרגיל בית 7 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. חשבו את חבורות גלואה הבאות ואת סריג תת-החבורות שלהן. מצאו גם את סריג תת-השדות של ההרחבות המתאימות.

א. $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q})$

ב. $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 7$.

ג. $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^7 - 1$.

שאלה 2. תהינה K/F ו- E/K הרחבות שדות.

א. נניח $[K : F] = 2$ ו- F ממאפיין שונה מ-2. הוכיחו כי K/F הרחבת גלואה.

ב. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז E/K הרחבה נורמלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: אם E/F הרחבה נורמלית, אז K/F הרחבה נורמלית.

ד. הוכיחו או הפריכו: אם K/F הרחבה נורמלית ו- E/K הרחבה נורמלית, אז E/F הרחבה נורמלית. רמז: ראינו משהו בסעיף הראשון ובתרגיל בית 5.

שאלה 3. קבעו האם ההרחבות הבאות הן נורמליות. אם לא, מצאו את הסגור הנורמלי שלהן.

א. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$

ב. $\mathbb{Q}[\rho]/\mathbb{Q}$ כאשר ρ הוא שורש יחידה מסדר 7. רמז: זה קל לפי השאלה הראשונה.

ג. $\mathbb{Q}(t)/\mathbb{Q}(t^3)$

בהצלחה!