פתרון בוחן בשיטות דיפרנציאליות ואינטגרליות: 83-114 תשע"ח

משך הבוחן: 90 דקות.
חומר עזר: מחשבון פשוט

שאלה 1.

קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, בתנאי או מתבדרים. הוכיחו את תשובתכם:

א. $\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

__פתרון:__

בגלל ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{|ln(1-x)|}{x}=1$ אז $\sum_{n=2}^{\infty}\left|ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right|$ ו- $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ הם טורים חברים לכן הטור שלנו __מתכנס בהחלט__.

ב. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$

__פתרון:__

באינטגרל $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$ עושים הצבה $t=\ln(x)$ ו- $dt=\frac{dx}{x}$ ומקבלים:

$$\int_{\ln(2)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\left[\lim_{t\to\infty}\sqrt{t}-\sqrt{\ln(2)}\right]=\infty$$

אז בגלל שהאינטגרל מתבדר, לפי מבחן האינטגרל, גם __הטור מתבדר__.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

__פתרון:__

בגלל ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ הם טורים חברים לכן הטור שלנו __לא מתכנס בהחלט__.

בגלל ש- $\frac{1}{n}\in(0,1]$ ופונקציה $\sin(x)$ חיובית בקטע, הטור בסמנים מתחלפים. גם $\cos(x)$ חיובית בקטע אז הנגזרת $\left(sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)'=-\frac{1}{n^2}cos\left(\frac{1}{n}\right)$ שלילית בקטע ואז הסדרה $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ יורדת מונוטונית ושואפת ל-0 כי $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\sin(x)=0$. לכן, לפי מבחן לייבניץ, הטור __מתכנס בתנאי__.

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

<u>פתרון:</u>

נסמן $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ו- $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$. לכן, לפי מבחן דלאמברט, הטור <u>מתכנס בהחלט.</u>

שאלה 2.

קבעו האם סדרת הפונקציות

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ n^2\left(\frac{2}{n}-x\right) & x\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \\ 0 & x\in\left[\frac{2}{n},1\right]\end{cases}$$

מתכנסת במ"ש בקטע [0,1].

<u>פתרון:</u>

נבדוק קודם התכנסות נקודתית.

כלומר, יהי $x\in[0,1]$ ונחשב את $f(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{f_n}(x)$.

עבור $x=0$ ברור לפי הגדרת הפונקציה כי $\mathrm{f_n}(0)=0$ ולכן $f(0)=0$.

לכל $0<x\leq 1$ עבור $n_0=\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+1\in\mathbb{N}$, ולכל $n>n_0$ מתקיים כי $x\in\left[\frac{2}{n},1\right]$, ולכן $\mathrm{f_n}(x)=0$ לכל $n>n_0$.

כלומר $f(x)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{f_n}(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$, ולכן יש התכנסות נקודתית.

כעת נבדוק התכנסות במ"ש ע"י מבחן ה $lim-sup$:

$$\lim_{n\to\infty}sup_{x\in[0,1]}\{f_n(x)-0\}\leq\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n=\infty\neq 0$$

ולכן ההתכנסות היא לא במ"ש.

שאלה 3.

הציגו את האינטגרל הבא כטור חזקות:

$\int_0^x e^{-t^2}dt$.

הוכיחו כי השוויון מתקיים לכל $x\in\mathbb{R}$.

בהצלחה! ☺