תרגול 16/05

משפט ערך הממוצע האינטגראלי: תהא $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ותהא $g(x)$ פונקציה אינטגרבילית אחרת אי-שלילית בו. אז קיימת נקודה $c\in[a.b]$ בה מתקיים השוויון:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \, .$$

אכן, אם נציב $g(x)=1$ נקבל את המקרה הקודם בו: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

תרגיל (תש"ע מועד א'): הראה כי: $\frac{1}{2e}\ln 2 \le \int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan x\,dx \le \frac{1}{2}\ln 2$.

פתרון: עפ"י משפט ערך הממוצע האינטגרלי קיימת נקודה $0<c<\frac{\pi}{4}$ בה מתקיים:

$$\int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\tan x\,dx = e^{-c^2}\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx$$

לגבי האינטגרל שנותר: $\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx = \int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx$ נציב: $t=\cos x$ ונקבל: $dt=-\sin xdx$, $t:1\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}$

ולפיכך: $\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int_1^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{t} = \int_{1/\sqrt{2}}^{1}\frac{dt}{t} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

כמו כן נרשום: $0<c<\frac{\pi}{4}<1 \;\Leftarrow\; 0<c^2<1 \;\Leftarrow\; 1<e^{c^2}<e \;\Leftarrow\; \frac{1}{e}<e^{-c^2}<1$.

כעת אם נכפיל את שתי התוצאות שקיבלנו נקבל את התוצאה המבוקשת.

1. חשבו את האינטגרלים המסוימים:

א. $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x\sin(\ln x+1)}{x}dx$

פתרון: נציב: $t=\ln x+1$. במקרה זה $dt=\frac{1}{x}dx$ וגבולות האינטגרציה החדשים הם

$t=\ln\frac{1}{e}+1=-1+1=0$ - גבול תחתון, $t=\ln e+1=1+1=2$ גבול עליון.

אחרי ההצבה ושינוי גבולות האינטגרציה נקבל $\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x\sin(\ln x+1)}{x}dx=\int_0^2(t-1)\sin t\,dt$

אינטגרציה בחלקים: $f=t-1, g'=\sin t$. במקרה זה $f'=1, g=-\cos t$

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x\sin(\ln x+1)}{x}dx=\int_0^2(t-1)\sin t\,dt=-(t-1)\cos t\Big|_0^2-\int_0^2-\cos t\,dt$$

$$=-(2-1)\cos 2+(0-1)\cos 0+\sin t\Big|_0^2=-\cos 2-1+\sin 2$$

ב. $\int_e^{e^3}\left|x^2-5x+6\right|dx$

פתרון: נשים לב ש- $\left|x^2-5x+6\right|=\begin{cases}x^2-5x+6 & x\le 2\vee x\ge 3\\ -x^2+5x-6 & 2<x<3\end{cases}$ ו- $2<e<3<e^3$ ולכן

$$\int_e^{e^3}\left|x^2-5x+6\right|dx=\int_e^3\left(-x^2+5x-6\right)dx+\int_3^{e^3}\left(x^2-5x+6\right)dx=\ldots=-9+\frac{19}{3}e^3-\frac{5}{2}e^2+6e+\frac{1}{3}e^9-\frac{5}{2}e^6$$

ג. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

פתרון: נשים לב שתחום ההגדרה של $f(x)=\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ הינו קטע $-1<x<1$,

בתחום זה הפונקציה רציפה ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

בנוסף $f(-x)=-f(x)$, כלומר הפונקציה אי זוגית ולכן $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx=0$.