1. (30 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

א. (10 נק')

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\cdot e^{3\cdot x}-x\cdot e^{-x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{xe^{3x}-xe^{-x}}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{(1+\cos(x))}_{\to 2}\cdot\underbrace{\frac{4x}{e^{4x}-1}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{4e^{-x}}}_{\to\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$$

ב. (10 נק')

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x)^{2\cdot x}-1}{x\cdot\ln(x)}$$

ראשית נחשב את כל הגבולות הבעייתיים בביטוי על מנת להתקדם

$$\lim_{x\to 0^+}x^{2x}=\{0^0\}=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln(x^{2x})}=\lim_{x\to 0^+}e^{2x\ln(x)}$$

$$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln(x)=\{0\cdot(-\infty)\}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{-\infty}{\infty},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-x=0$$

כעת

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{2x}-1}{x\ln(x)}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{\frac{e^{2x\ln(x)}-1}{2x\ln(x)}}_{\to 1}\cdot 2=2$$

ג. (10 נק')

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\sqrt{\sqrt{9\cdot x^2+7}+46\cdot x}+x}-\sqrt{x}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{9x^2+7}+46x}+x}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}+1}+\sqrt{x}}=$$

$$= \frac{\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46}}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+46+1}+1}} \to_{x\to\infty} \frac{7}{2}$$

2. (36 נק') יהי פרמטר חיובי $0 < a \in \mathbb{R}$. נביט בסדרה

$$a_n = n^{4\cdot a} \cdot (\ln(n^3+5) - 3\cdot\ln(n))$$

א. (12 נק') כתבו את כל הגבולות האפשריים של הסדרה a_n.

ב. (12 נק') מצאו ערך של הפרמטר החיובי a עבורו הטור הבא מתכנס **בתנאי**. אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n$$

ג. (12 נק') מצאו ערך של הפרמטר החיובי a עבורו הטור מהסעיף הקודם מתכנס **בהחלט**. אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

סעיף א'

$$n^{4a}(\ln(n^3+5) - 3\ln(n)) = n^{4a}(\ln(n^3+5) - \ln(n^3)) = n^{4a}\ln\left(1+\frac{5}{n^3}\right) = \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{5}{n^3}\right)}{\frac{5}{n^3}}}_{\to 1} \cdot 5\cdot n^{4a-3}$$

לכן, כאשר $4a-3>0$ כלומר $a>\frac{3}{4}$ הגבול יהיה אינסוף

כאשר $4a-3<0$ כלומר $a<\frac{3}{4}$ הגבול יהיה אפס

כאשר $4a-3=0$ כלומר $a=\frac{3}{4}$ הגבול יהיה 5

סעיף ב':

ראשית, על מנת שיהיה סיכוי כלשהו שהטור מתכנס, חייב ש $a<\frac{3}{4}$

לפי החישובים בסעיף א', הטור חבר של הטור

$$\sum n^{4a-3} = \sum \frac{1}{n^{3-4a}}$$

טור זה מתכנס כאשר $3-4a>1$ כלומר

$$4a < 2$$

$$a < \frac{1}{2}$$

אבל אם טור זה מתכנס, הטור שלנו מתכנס בהחלט בניגוד למה שבקשו מאיתנו.

צריך לבחור $a \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$

נבחר למשל $a = \frac{1}{2}$

במצב זה, הטור אינו מתכנס בהחלט כפי שהראנו, אך $a_n \to 0$ ולכן הטור יתכנס (וסה"כ יתכנס בתנאי) אם נוכיח שa_n יורדת (לפי לייבניץ')

הסדרה היא

$$n^2 \ln\left(1 + \frac{5}{n^3}\right)$$

נחקור את הפונקציה המתאימה

$$f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)$$

$$f'(x) = 2x \ln\left(1 + \frac{5}{x^3}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{x^3}} \cdot \left(-3 \cdot \frac{5}{x^4}\right) = x\left(2\ln\left(1 + \frac{5}{x^3}\right) - \frac{15}{x^3 + 5}\right) =$$

$$= \frac{x}{x^3 + 5}\left(2\ln\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)(x^3 + 5) - 15\right)$$

$$2\ln\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)(x^3 + 5) = 2\ln\left(\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)^{x^3+5}\right) \to 10$$

$$\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)^{x^3+5} \to \{1^\infty\} \to e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(x^3+5)}{x^3}} = e^5$$

לכן

$$2\ln\left(1 + \frac{5}{x^3}\right)(x^3 + 5) - 15 \to -5$$

ולכן הנגזרת שלילית החל משלב מסויים, ולכן הפונקציה יורדת, ולכל החל משלב מסוים

$$f(n+1) < f(n)$$

וזה מה שרצינו.

סעיף ג'

כבר בסעיף ב' הוכחנו כי הטור מתכנס בהחלט אם $a < \frac{1}{2}$

נבחר $a = \frac{1}{4}$

3. (42 נק') יהי פרמטר $a \in \mathbb{R}$ ותהי פונקציה:

$$f(x) = \sqrt{|(x - a^2 - 2 \cdot a)(x + a + 2)|}$$

א. (18 נק') מצאו ערך של הפרמטר a וערך של הנקודה x כך שהפונקציה אינה גזירה בנקודה x.

ב. (12 נק') מצאו ערך של a עבורו הפונקציה גזירה בכל הממשיים. אם לא קיים ערך כזה, ציינו זאת ונמקו מדוע.

ג. (12 נק') מצאו ערך של a עבורו <u>לא קיימת</u> נקודה x בה $f'(x) = 0$. אם אין ערך כזה (של a), ציינו זאת ונמקו מדוע.

נבחר למשל $a = 0$

ונקבל את הפונקציה

$$f(x) = \sqrt{|x(x+2)|}$$

שורש אינה גזירה באפס, לכן אם נבחר נקודה בה הביטוי הפנימי מתאפס <u>יש סיכוי</u> שהפונקציה לא תהיה גזירה.

למשל נבחר $x = 0$ ונוכיח כי אכן הפונקציה אינה גזירה בנקודה זו

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x(x+2)|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} \cdot \underbrace{\sqrt{|x+2|}}_{\to\sqrt{2}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

ולכן הפונקציה אכן אינה גזירה, כי גבול שיפועי המיתרים אינו קיים וסופי (מצד ימין קיבלנו אינסוף)

ננסה להוכיח כי לכל a הפונקציה אינה גזירה בנקודה $x = -a - 2$ (שוב ההגיון בניחוש זה הוא שהביטוי הפנימי מתאפס, והרי בנקודות האחרות זה יהיה גזיר).

$$\lim_{x \to (-a-2)} \frac{\sqrt{|(x - a^2 - 2a)(x + a + 2)|} - 0}{x - (-a-2)} = \lim_{x \to (-a-2)} \underbrace{\frac{\sqrt{|(x+a+2)|}}{x + a + 2}}_{\to\pm\infty} \cdot \underbrace{\sqrt{|x - a^2 - 2a|}}_{\to\sqrt{|-a-2-a^2-2a|}}$$

$$\sqrt{|-a - 2 - a^2 - 2a|} = \sqrt{|a^2 + 3a + 2|}$$

אם $a^2 + 3a + 2 \neq 0$ ברור שהפונקציה אינה גזירה כי גבול שיפועי המיתרים בנקודה אינו סופי.

בנקודות $a = -1, -2$ הפרבולה מתאפסת, וצריך לראות מה קורה.

עבור $a = -1$

$$f(x) = \sqrt{|(x+1)^2|} = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|$$

זה אינו גזיר ב$x = -1$ (קל להוכיח)

עבור $a = -2$ נקבל

$$f(x) = \sqrt{|x^2|} = |x|$$

שאינו גזיר באפס.

סה"כ – אין ערך של הפרמטר עבורו הפונקציה גזירה בכל הממשיים.

סעיף ג':

עבור $a = -2$ הפונקציה היא $f(x) = |x|$ ונגזרתה לעולם אינה מתאפסת, היא רק 1 או מינוס 1, ובאפס אינה גזירה כלל.