

שאלה 1

תהי $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ סדרה בעלת תת-הסדרות

$$b_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, b_M: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

המוגדרות ע"י $b_i = a \circ c_i$ באשר $c_i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ סדרות עולות ממש. ($M \in \mathbb{N}$)

נניח כי $L_i \in \mathbb{R} \rightarrow b_i$ לכל i , וכן כי $\bigcup_i \text{Im}(c_i) = \mathbb{N}$.

הוכיחו כי אוסף הגבולות החלקיים של $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ הוא בדיוק $\{L_1, L_2, \dots, L_M\}$.

שאלה 2

תהי A קבוצה סופית של מספרים ממשיים. בנו סדרה כך שקבוצת כל הגבולות החלקיים שלה היא A .

שאלה 3 הוכיחו/הפריכו:

א. אם $a_n \leq L$ החל ממקום מסוים, אז $\limsup(a_n) \leq L$.

ב. אם $a_n \leq L$ עבור אינסוף n -ים, אז $\liminf(a_n) \leq L$.

ג. אם $a_n \geq L$ החל ממקום מסוים, אז $\limsup(a_n) \geq L$.

ד. אם $a_n \geq L$ עבור אינסוף n -ים, אז $\liminf(a_n) \geq L$.

שאלה 4 תהי (a_n) סדרה בעלת תת-סדרות מתכנסות $b_n = a_{2n}, c_n = a_{3n}$. הוכיחו/הפריכו:

א. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.

ב. הסדרה (a_n) מתכנסת.

שאלה 5 הוכיחו/הפריכו:

א. אם $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow 0$ אז $(a_n)^{b_n} \rightarrow \infty$.

ב. אם $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow 0$ אז $(a_n)^{b_n} \rightarrow 0$.

ג. אם $a_n \rightarrow 0, b_n \rightarrow \infty$ אז $(a_n)^{b_n} \rightarrow 0$.

שאלה 6 חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות:

$$א. a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$$

$$ב. a_n = \left(\frac{n}{n^2-2}\right)^{3n}$$

$$ג. עבור $a \in \mathbb{R}$ $a_n = \left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n$$$

$$ד. a_n = \left(\frac{n^2+4}{n^2+n+1}\right)^{3n+2}$$

שאלה 7

תהי סדרה המקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ לכל $n \geq 2$. הוכיחו כי a_n מתכנסת.

רמז:

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \dots + a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n|$$