שימושים גיאומטריים ופיזיקליים לחומר הנלמד

באינפי 4

18 ביוני 2015

התרגום למושגים הפיזיקליים הוא חופשי שלי. אבשלום קור, מאחוריך.

לא נתתי דוגמאות לשימושים שכן ראינו (גיאומטריים). אפשר למצוא דוגמאות בתרגולים.

<u>אינטגרל מסילתי:</u>

1. ראינו שבעזרת אינטגרל מסילתי מסוג ראשון אפשר לחשב את **אורכה של עקומה**, ע"י הנוסחה:

$$L(\gamma)=\int\limits_{\gamma}ds=\int\limits_{a}^{b}\|\gamma'(t)\|\,dt$$

2. כמו כן ראינו שאפשר, בעזרת אינטגרל מסילתי מסוג שני, לחשב את **השטח הכלוא ע"י עקומה מישורית** C, ע"י:

$$S=\int\limits_{C}xdy=-\int\limits_{C}ydx=\frac{1}{2}\int\limits_{C}xdy-ydx$$

3. **חישוב נפח גוף סיבוב של עקומה מישורית:**

יהי R תחום בחצי המישור העליון $(y\geq 0)$ הכלוא ע"י עקומה C שכיוון ההתקדמות עליה הוא נגד כיוון השעון. נסמן ב־Ω את הגוף הנוצר ע"י סיבוב R סביב ציר ה־x.

אזי, הנפח של Ω ניתן לחישוב ע"י הנוסחה:

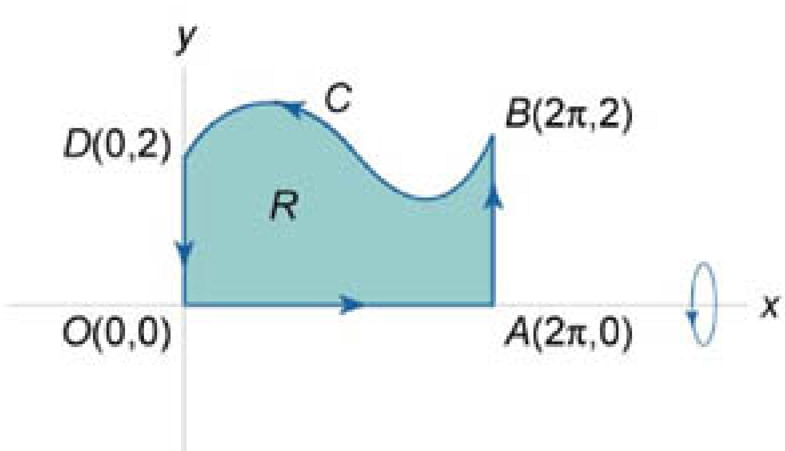
$$V = -\pi \int\limits_C y^2 dx = -2\pi \int\limits_C xy dy = -\frac{\pi}{2} \int\limits_C 2xy dy + y^2 dx$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את נפח הגוף הנוצר ע"י סיבוב התחום הכלוא ע"י העקומה $y = 2 - \sin x$ והקווים $x = 0, x = 2\pi, y = 0$, סביב ציר ה$-x$.

<u>פתרון:</u>

התחום שלנו הוא:



והשטח נתון ע"י הנוסחה:

$$V = -\pi \int\limits_C y^2 dx$$

ואת האינטגרל אפשר לפרק לארבעה אינטגרלים:

$$\int\limits_{OA} y^2 dx + \int\limits_{AB} y^2 dy + \int\limits_{BD} y^2 dy + \int\limits_{DO} y^2 dy$$

נחשב כל אחד מהם בנפרד:

$$\int\limits_{OA} y^2 dx = \int\limits_0^{2\pi} 0 dx = 0$$

$$\int_{AB} y^2 dx = \int_0^{2\pi} 0 dx = 0$$

$$\int_{BD} y^2 dx = -\int_0^{2\pi} (2-\sin x)^2 dx = -\int_0^{2\pi} (4 - 4\sin x + \sin^2 x) dx =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (4 - 4\sin x + \frac{1-\cos 2x}{2}) dx = \left(-\frac{9}{2}x - 4\cos x + \frac{\sin 2x}{4}\right)_0^{2\pi} = -9\pi$$

$$\int_{DO} y^2 dx = \int_0^{2\pi} 0 dx = 0$$

ובסך הכל נקבל שהנפח הוא:

$$V = -\pi \cdot (-9\pi) = 9\pi^2$$

4. **מסה של חוט ($wire$):**

נניח שחוט מתואר ע"י העקומה התלת מימדית C, והמסה ליחידת אורך של החוט, הצפיפות, היא פונקציה רציפה ρ.

אזי, אפשר לחשב את מסת החוט ע"י הנוסחה:

$$m = \int_C \rho ds$$

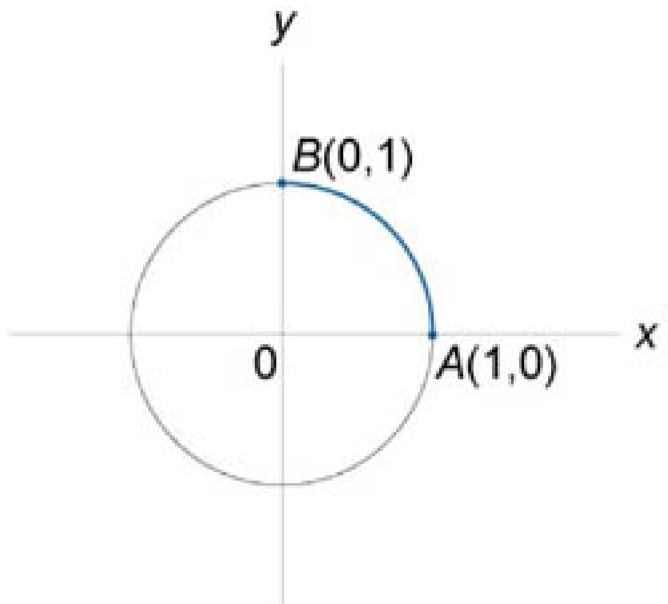
<u>לדוגמה:</u>

מצאו את מסת החוט לאורך קשת המעגל $x^2 + y^2 = 1$ מהנקודה $A(1,0)$ לנקודה $B(0,1)$, כאשר הצפיפות נתונה ע"י הפונקציה:

$$\rho(x,y) = xy$$

<u>פתרון:</u>

החוט שלנו הוא:



פרמטריזציה מתאימה היא: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. נקבל:

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

לכן המסה היא:

$$m = \int\limits_C \rho ds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \rho(\gamma(t))\cdot\|\gamma'(t)\|\, dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{1}{4}\cos 2t|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

5. **מרכז המסה ומומנטי ההתמד (אינרציה) של חוט:**

נניח שחוט מתואר ע"י עקומה C וצפיפותו היא פונקציה רציפה ρ.

מרכז המסה של החוט נתון ע"י הנוסחה:

$$\bar{x} = \frac{\int_C x\rho ds}{m}, \bar{y} = \frac{\int_C y\rho ds}{m}, \bar{z} = \frac{\int_C z\rho ds}{m}$$

מומנטי ההתמד לאורך הצירים נתונים ע"י הנוסחאות:

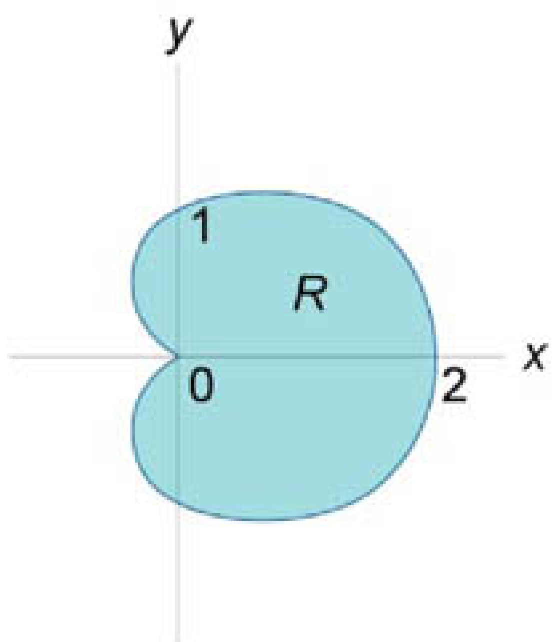
$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\rho ds$$
$$I_y = \int_C (x^2 + z^2)\rho ds$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\rho ds$$

<u>לדוגמה:</u>

מצאו את מרכז המסה של חוט שמונח לאורך הקרדיואדה $r = (1 + \cos\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ עם צפיפות $\rho = 1$.

<u>פתרון:</u>

החוט שלנו הוא:



ברור ש-$\bar{y} = 0$, משיקולי סימטריה.

בשביל הקואורדינטה $\bar{x} = 0$, מספיק להסתכל רק על החלק העליון של הקרדיואדה.

נחשב את המסה. בקואורדינטות פולריות:

$$m = \int_0^\pi \rho(r,\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2} d\theta = \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \sin^2\theta} d\theta =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta = 4\sin\frac{\theta}{2}|_0^{\pi} = 4$$

ונחשב:

$$\int_C x\rho ds = \int_0^{\pi} r\cos\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\theta}\right)^2}d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)\cos\theta\sqrt{1+\cos\theta}d\theta = \frac{16}{5}$$

כדי לחשב את האינטגרל נשתמש בזהות של זווית כפולה $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$. מכאן אלו פונקציות טריגונומטריות במעלות גבוהות, ומשתמשים בזהויות כדי להוריד את המעלה (קצת אינפי 2).

לכן, מרכז המסה הוא:

$$(0,\frac{\frac{16}{5}}{4}) = (0,\frac{4}{5})$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את מומנט ההתמד I_x של חוט לאורך המעגל $x^2+y^2=a^2$ עם צפיפות $\rho=1$.

<u>פתרון:</u>

פרמטריזציה של המעגל היא: $\gamma(t)=(a\cos t, a\sin t)$ כאשר $t\in[0,2\pi]$. כלומר:

$$\|\gamma'(t)\| = \|(-a\sin t, a\cos t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a$$

ולכן:

$$I_x = \int_C y^2 ds = \int_0^{2\pi}(a\sin t)^2 a dt = a^3\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{a^3}{2}(t-\frac{\sin 2t}{2})|_0^{2\pi} = \pi a^3$$

6. עבודה לאורך עקומה:

העבודה הנעשית ע"י כוח $\vec{F}$ על אובייקט לאורך עקומה C נתונה ע"י:

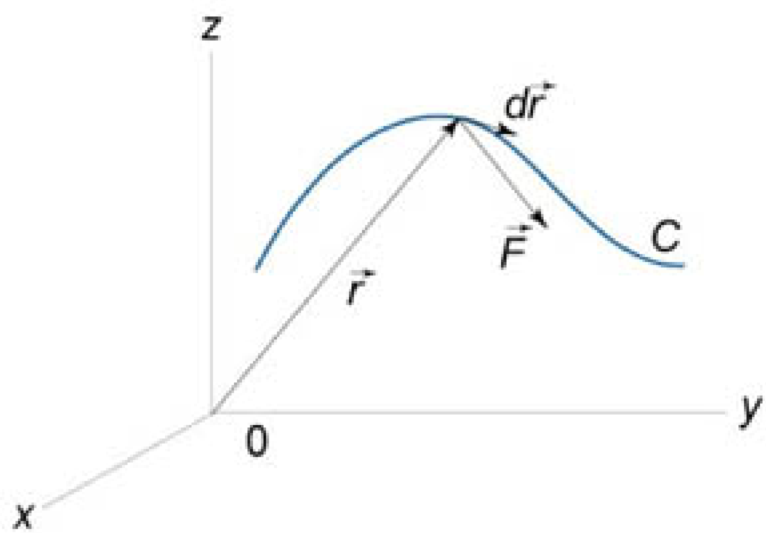
$$W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

אם השדה $\vec{F}$ משמר, העבודה נתונה ע"י:

$$W = f(b) - f(a)$$

כאשר העקומה מתחילה בנקודה a ומסתיימת בנקודה b, והפונקציה f היא הפוטנציאל של F.

אפשר להמחיש זאת ע"י:



הוקטור $d\vec{r}$ הוא וקטור יחידה משיק.

נשים לב שהכוח שמזיז את האובייקט לאורך העקומה הוא לאו דווקא הכוח שלנו, ולכן עבודה יכולה להיות שלילית..

זהו פשוט אינטגרל מסילתי מסוג שני.

7. **חוק אמפר:**

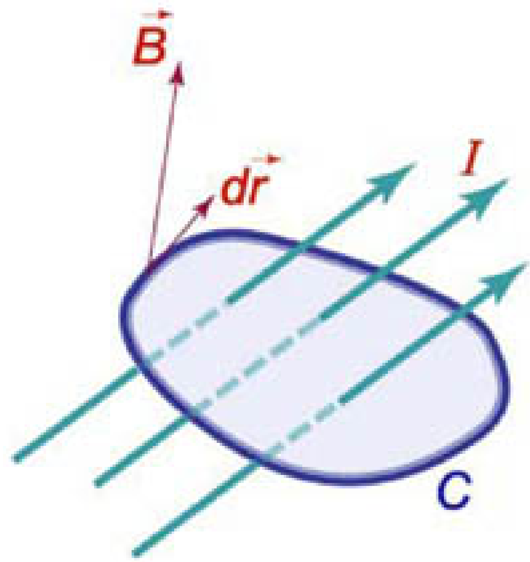
קיים יחס ישיר בין הזרם החשמלי העובר דרך עקומה סגורה לבין השדה המגנטי המשיק לעקומה הנוצר כתוצאה מהזרם.

היחס נתון ע"י הנוסחה:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I$$

כאשר I הוא הזרם החשמלי, C העקומה, $\vec{B}$ הוא השדה המגנטי, ו־μ_0 הוא קבוע החדירות בוואקום ($vacuum\ permeability\ constant$).

אפשר להמחיש זאת ע"י:



חוק אמפר, עם תיקון, הוא משוואת מקסוול הרביעית.

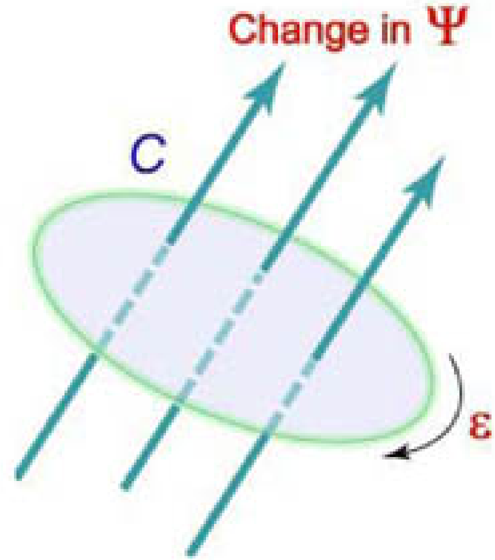
8. **חוק פאראדיי:**

השתנות בזמן של השטף המגנטי דרך מוליך גורמת להשראת מתח חשמלי, כוח אלקטרו־מניע, במוליך. ובנוסחה:

$$\varepsilon = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\psi}{dt}$$

כאשר ε הוא הכוח האלקטרו־מניע, C עקומה סגורה ו־ψ השטף המגנטי.

אפשר להמחיש זאת ע"י:



חוק פאראדיי הוא משוואת מקסוול השלישית.

<u>אינטגרל משטחי:</u>

1. ראינו שאפשר לחשב **שטח פנים של משטח** S ע"י:

$$\mu(S) = \iint\limits_{S} dS = \iint\limits_{D} \|\phi_u \times \phi_v\| \, dudv$$

כאשר $\phi(u,v)$ פרמטריזציה של המשטח ו$D-$ התחום של u,v.

2. ראינו, בעזרת משפט הדיברגנץ, אפשר לחשב **נפח של גוף** S ע"י הנוסחה:

$$V = \frac{1}{3}|\iint\limits_{S} xdydz + ydxdz + zdxdy|$$

3. **מסה של מעטפת:**

נניח ש$S-$ מעטפת של גוף כלשהו, שצפיפותו נתונה ע"י פונקציה רציפה $\mu(x,y,z)$.

המסה של S נתונה ע"י הנוסחה:

$$m = \iint\limits_{S} \mu(x,y,z)dS$$

<u>לדוגמה:</u>

מצאו את מסת הגליל הנתון ע"י הפרמטריזציה:

$$\phi(u,v) = (a\cos u, a\sin u, v)$$

כאשר $u \in [0,2\pi], v \in [0,H]$, וצפיפותו נתונה ע"י: $\mu(x,y,z) = z^2(x^2+y^2)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את אלמנט השטח. וקטורי הנגזרות הם:

$$\phi_u = (-a\sin u, a\cos u, 0), \phi_v = (0,0,1)$$

לכן:

$$\phi_u \times \phi_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin u & a\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos u, a\sin u, 0)$$

ואם כן:

$$\|\phi_u \times \phi_v\| = \sqrt{a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u} = a$$

כמו כן:

$$\mu(\phi(u,v)) = v^2(a^2\cos^2 u + a^2\sin^2 u) = a^2v^2$$

ולכן:

$$m = \iint\limits_S \mu(x,y,z)dS = \iint\limits_D a^2v^2 a dvda = a^3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^H vdvdu = 2\pi a^3\cdot\frac{v^3}{3}|_0^H = \frac{2\pi a^3 H^3}{3}$$

4. **מרכז המסה ומומנטי ההתמד של משטח:**

יהי S משטח שמסתו m צפופה לפי הפונקציה הרציפה μ. מרכז המסה נתון ע"י הנוסחה:

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x\mu dS}{m}, \bar{y} = \frac{\iint_S y\mu dS}{m}, \bar{z} = \frac{\iint_S z\mu dS}{m}$$

מומנטי ההתמד ביחס לצירים הם:

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\mu dS$$
$$I_y = \iint_S (x^2+z^2)\mu dS$$
$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\mu dS$$

מומנטי ההתמד ביחס למישורים הם:

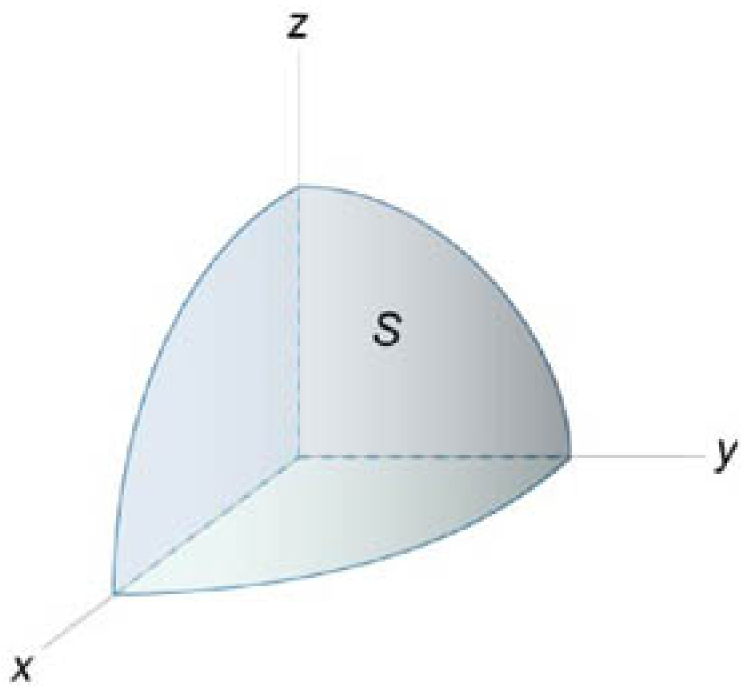
$$I_{xy} = \iint_S z^2\mu dS$$
$$I_{xz} = \iint_S y^2\mu dS$$
$$I_{yz} = \iint_S x^2\mu dS$$

<u>לדוגמה:</u>

מצאו את מרכז המסה של הספירה $x^2+y^2+z^2=a^2$ בתומן (אוקטנט) השמיני, אם הצפיפות היא μ_0 קבועה.

<u>פתרון:</u>

אנחנו מסתכלים על:



המסה היא:

$$m = \frac{1}{8}\iint\limits_S \mu_0 dS = \frac{\mu_0}{8}\iint\limits_S dS = \frac{\mu_0}{8}\cdot 4\pi a^2 = \frac{a^2\mu_0\pi}{2}$$

כעת:

$$\iint\limits_S x\mu dS = \mu_0\iint\limits_S xdS = \mu_0\iint\limits_D x\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

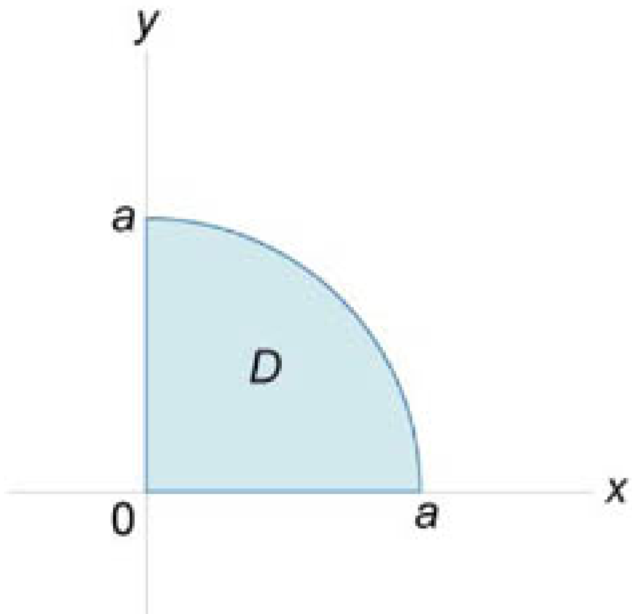
מכיוון שהמשטח ניתן להטלה, $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$. אם כן:

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

ולכן:

$$\mu_0\iint\limits_D x\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy = \mu_0\iint\limits_D x\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}} = \mu_0\iint\limits_D \frac{ax}{a^2-x^2-y^2}$$

התחום D הוא הטלה של המשטח אל מישור xy:



ויהיה נוח לעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

כאשר $0 \le r \le a, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$= \mu_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{ar\cos\theta}{\sqrt{a^2-r^2}} r dr d\theta = \mu_0 a \int_0^a \frac{r^2-a^2+a^2}{\sqrt{a^2-r^2}} (-\sin\theta)|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} dr =$$

$$= \mu_0 a \cdot (-\int_0^a \sqrt{a^2-r^2} dr - a^2 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} dr)$$

את האינטגרל השמאלי אפשר לחשב בעזרת הצבה $r = a\sin t$. מקבלים $-\frac{\pi a^2}{4}$.

האינטגרל הימני הוא ארקסינוס ומקבלים $-\frac{\pi}{2}$. לכן:

$$= \mu_0 a \cdot (-\frac{\pi a^2}{4} - a^2 \cdot \frac{-\pi}{2}) = \frac{\mu_0 \pi a^3}{4}$$

לכן:

$$\bar{x} = \frac{\frac{\mu_0 \pi a^3}{4}}{\frac{\mu_0 \pi a^2}{2}} = \frac{a}{2}$$

ומשיקולי סימטריה נקבל שמרכז המסה נמצא בנקודה:

$$(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$$

<u>לדוגמה:</u>

חשבו את מומנט ההתמד של ההמיספירה $x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0$ שלה צפיפות קבועה μ_0 ביחס לציר ה$-z$.

<u>פתרון:</u>

המומנט נתון ע"י הנוסחה:

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\mu dS = \mu_0 \iint_S (x^2+y^2) dS$$

המשטח שלנו ניתן להטלה: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ולכן אלמנט השטח הוא:

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

ולכן:

$$I_z = \mu_0 \iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$$

כאשר התחום D הוא עיגול היחידה. נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

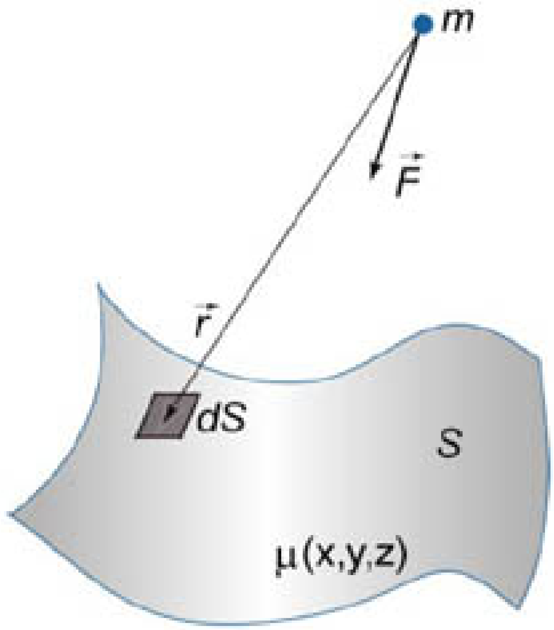
כאשר $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi$. היעקוביאן הוא r ולכן:

$$= \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta = 2\pi\mu_0 \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^2}} dr = \frac{4\pi\mu_0}{3}$$

את האינטגרל אפשר לחשב בעזרת ההצבה $t = 1 - r^2$.

5. **כוח כבידה:**

נניח שיש לנו מסה m בנקודה (x_0, y_0, z_0) מחוץ למשטח S:



כוח המשיכה בין המסה m והמשטח S נתון ע"י הנוסחה:

$$\vec{F} = Gm \iint_S \mu \frac{\vec{r}}{r^3} dS$$

כאשר $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, G הוא קבוע הגרביטציה ו־μ פונקציית הצפיפות של S.

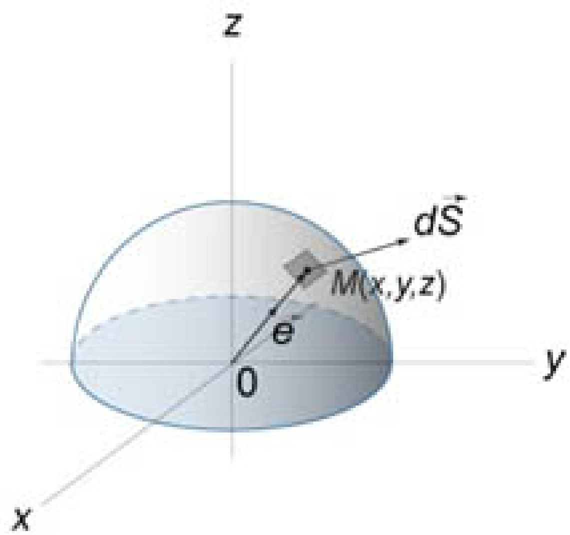
באינטגרל של וקטור הכוונה היא לאינטגרל רכיב־רכיב.

לדוגמה:

חשבו את כוח המשיכה בין המיספירה עם רדיוס r, מרכז בראשית וצפיפות קבועה μ_0 לבין מסה m הממוקמת בראשית.

פתרון:

נתבונן במשטח:



תהי $M(x,y,z)$ נקודה על ההמיספירה, השייכת לאלמנט השטח dS.

אפשר להביע את כוח המשיכה $d\vec{F}(M)$ בין אלמנט השטח dS לבין המסה m ע"י:

$$d\vec{F}(M) = \frac{Gm\mu_0 dS}{r^2}\vec{e}(O,M)$$

כאשר $\vec{e}(O,M)$ וקטור יחידה בין O ל$-M$.

מכיוון ש:

$$\vec{e} = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$$

נקבל:

$$d\vec{F}(M) = \frac{Gm\mu_0 dS}{r^3}$$

ולכן:

$$F_x = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \iint\limits_S xdS, F_y = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \iint\limits_S ydS, F_z = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \iint\limits_S zdS$$

נעבור לקואורדינטות ספריות :

$$x = r\cos\psi\sin\theta, y = r\sin\psi\sin\theta, z = r\cos\theta$$

כאשר $(\psi,\theta) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$. היעקוביאן הוא $r^2\sin\theta$, ואם כן:

$$F_x = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \iint\limits_S xdS = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} r\cos\psi\sin\theta r^2 \sin\theta d\theta d\psi =$$

$$= Gm\mu_0 \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta (\sin\psi)_{\psi=0}^{2\pi} d\theta = 0$$

$$F_y = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \iint\limits_S ydS = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} r\sin\psi\sin\theta r^2 \sin\theta d\psi d\theta =$$

$$= Gm\mu_0 \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta (-\cos\psi)_{\psi=0}^{2\pi} d\theta = 0$$

$$F_z = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \iint\limits_S zdS = \frac{Gm\mu_0}{r^3} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} r\cos\theta r^2 \sin\theta d\psi d\theta =$$

$$Gm\mu_0 \cdot 2\pi \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin 2\theta}{2} d\theta = \pi Gm\mu_0$$

שימו לב שהתוצאה $F_x = F_y = 0$ היא הגיונית מכיוון שהמשטח סימטרי ביחס לצירים x, y.

לאורך צירים אלו, המשטח מושך את המסה m לכיוונים ההפוכים באותו אופן (וכך גם המסה את המשטח), מין "משוך בחבל" של צדדים שקולים לחלוטין ולכן אין לאורך צירים אלו משיכה כלל.

לכן המשיכה F היא לאורך ציר ה$-z$.

6. **כוח לחץ:**

נניח שהמשטח S נתון ע"י פרמטריזציה ϕ ונלחץ ע"י כוח כלשהו (משטח כזה הוא למשל סכר, פקק בקבוק של משקה מוגז או כנף מטוס).

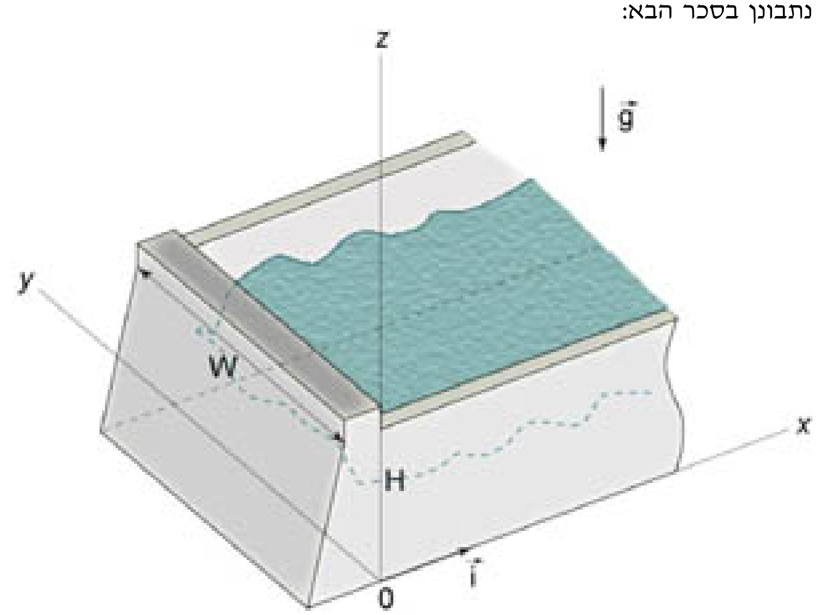
הכוח $\vec{F}$ הנוצר ע"י הלחץ $p(\phi)$ נתון ע"י:

$$\vec{F} = \iint_S p\vec{n}dS$$

כאשר $\vec{n}$ נורמל יחידה למשטח.

<u>לדוגמה:</u>

נתבונן בסכר הבא:



חשבו את כוח הלחץ הפועל על הסכר, שחוסם מאגר מים ברוחב W ובעומק H.

תחת הנחה של שיווי משקל הידרו־סטטי, הלחץ על משטח הסכר (תלוי ב$-z$) הוא:

$$p(z) = \rho g(H - z)$$

כאשר ρ היא צפיפות המים ו$-g$ התאוצה הכבידתית.

<u>פתרון:</u>

אם כן, הלחץ הוא:

$$\vec{F} = \iint\limits_S p\vec{n}dS = \int\limits_0^W \int\limits_0^H \rho g(H-z)(-1,0,0)dydz = (-\frac{\rho g W H^2}{2},0,0)$$

הערך המוחלט הוא:

$$|\vec{F}| = \frac{\rho g W H^2}{2}$$

7. **שטף נוזל ושטף מסה:**

אם שדה וקטורי $\vec{v}(\vec{r})$ מתאר מהירות של נוזל, השטף לאורך משטח S שווה לנפח הנוזל העובר דרך S ביחידת זמן אחת, ונתון על ידי הנוסחה:

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

שטף זה נקרא שטף נוזל.

באופן דומה, השטף של שדה וקטורי $\vec{F} = \rho\vec{v}$ כאשר ρ מתאר את צפיפות הנוזל נתון על ידי הנוסחה:

$$\Phi = \iint\limits_S \rho\vec{v}(\vec{r})d\vec{S}$$

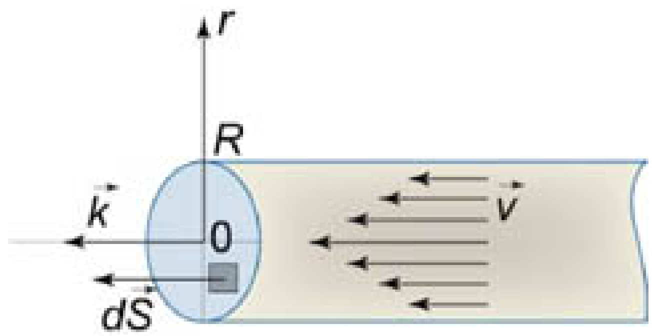
שטף זה נקרא שטף מסה.

<u>לדוגמה:</u>

נוזל צמיגי זורם לאורך צינור גלילי עם רדיוס R. מהירות הנוזל מתוארת ע"י:

$$\vec{v} = Ce^{-r}\vec{k}$$

כאשר $\vec{k}$ הוא וקטור יחידה לאורך הצינור בכיוון הזרם, r הוא המרחק מהצינור ו־C הוא קבוע.



חשבו את שטף הנוזל.

<u>פתרון:</u>

עלינו לחשב את האינטגרל:

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

במקרה שלנו:

$$\Phi = \iint\limits_S Ce^{-r} dS$$

מכיוון שלוקטורים $\vec{k}$ ו־$d\vec{S}$ אותו הכיוון.

אנחנו נמצאים בגליל, ולכן אם נעבור לקואורדינטות קוטביות נקבל:

$$\Phi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R Ce^{-r} r dr = 2\pi C \int\limits_0^R e^{-r} r dr = 2\pi C(1 - (R+1)e^{-R})$$

ה־r שנוסף הוא היעקוביאן. את האינטגרל קל לחשב באינטגרציה בחלקים.

8. **מטען של משטח:**

נניח ש-$\sigma(x,y)$ מתארת צפיפות מטען על משטח S. המטען על המשטח S נתון על ידי הנוסחה:

$$Q = \iint\limits_S \sigma(x,y) dS$$

9. **חוק גאוס:**

השטף החשמלי $\vec{D}$ דרך משטח סגור S יחסי למטען Q הכלוא על ידי המשטח:

$$\Phi = \iint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i Q_i$$

כאשר $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$. $\vec{E}$ הוא חוזק השדה החשמלי, ε הוא המקדם הדיאלקטרי, $\varepsilon_0 = 8.8541878 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$.

במקרה הבדיד המטען Q הוא סכום כל המטענים הכלואים.

חוק גאוס הוא משוואת מקסוול הראשונה.

10. **חוק גאוס למגנטיות:**

המתחיל במצווה אומרים לו גמור. חוק גאוס למגנטיות הוא משוואת מקסוול השנייה, והוא טוען:

$$\Phi_B = \iint\limits_S B \cdot d\vec{S} = 0$$

כאשר B מציין את השדה המגנטי ו-S הוא המשטח. החוק בעצם טוען שהשטף המגנטי דרך מעטפת סגורה הוא 0.