הרצאה VI- אינפי 1

המשך מהרצאה קודמת:

אם קיים גבול $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ אזי $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = L$. נוכיח כעת עבור L שהוא $+\infty$.. נקבע E ממשי .

קיבלנו $\exists\bar{n}\forall n\geq\bar{n}:\ x_n>E, and\ then\ x_{\bar{n}},x_{\bar{n}+1},\ldots>E$. ז"א ש$l_{\bar{n}}=inf x_n\geq E$. ומתקיים כי $\forall n\geq\bar{n}:\ l_n\geq l_{\bar{n}}E$.

וע"פ הגדרה נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty} l_n=+\infty$. וע"פ הלמה על הסנדוויץ', קיבלנו כי $\lim\limits_{n\to\infty} l_n\leq\lim\limits_{n\to\infty} x_n\leq\lim\limits_{n\to\infty} L_n$, וע"פ המשפט נקבל כי הגבול הינו $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$. עבור השלילי ההוכחה דומה מאוד.

<u>משפט</u>: A תת קבוצה של הממשיים. נגדיר: $-A\coloneqq\{y=-x\,,x\in A\}$. אזי: $\sup(-A)=-\inf(A)\,,\inf(-A)=-supA$.

הוכחה: הוכחנו זאת בתרגיל בית מספר 2.

מסקנות לגבי גבולות: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} -x_n=-\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ולהיפך $-\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\varliminf\limits_{n\to\infty} -x_n$.

<u>גבולות של סדרות ספציפיות</u>:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0:(p\in\mathbb{N})$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1:(p>0)$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n}=0:(q>1,k\in\mathbb{N})$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^n}{n!}=0:(q>1)$

הוכחה:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$ ולפי למת הסנדוויץ, $0<\frac{1}{n^p}\leq\frac{1}{n}$. אם P לא טבעי, אלא שבר מסויים, נוכיח לפי הגדרה. נסמן: $p=\frac{1}{k}$. ונחשב את הגבול ע"י $\varepsilon<\frac{1}{\sqrt[k]{n}}<0$ ונקבל כי $n>(\frac{1}{\varepsilon})^k$ ונגדיר את $\bar{n}$ ע"י $\bar{n}=\left[(\frac{1}{\varepsilon})^k\right]+1$. כאשר הסוגריים המרובעות מסמנות את המספר המקסימלי השלם שקטן ממה שבתוך הסוגריים. לדוגמא: $\left[\frac{3}{2}\right]=1$. משל.

2) נסמן $\alpha_n\coloneqq\sqrt[n]{p}-1$. ונקבל $\alpha_n+1=\sqrt[n]{p}$. נקבל כי $p=(1+\alpha_n)^n>n\alpha_n$. ואז $0<\alpha_n<\frac{p}{n}$ ולכן הגבול המתקבל הוא אפס, ואז הוכחנו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$.

3) נסמן $\alpha_n\coloneqq\sqrt[n]{n}-1$. ונקבל $\alpha_n+1=\sqrt[n]{n}$, ומתקיים כי $n=(1+\alpha_n)^n$ ואז מתקבל $n>\frac{n(n-1)\alpha_n^2}{2}$ ומכאן שמתקיים כי $0<\alpha_n^2<\frac{2}{n-1}$ נבצע פעולת שורש ונקבל $0<\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n+1=0+1=1$. משל.

4) נגדיר $q=1+\alpha$ ואז $q^n=(1+\alpha)^n$ ומתקיים *n>k+1*. ואז $n>2k$ $n-k>\frac{n}{2}\ and\ then$.

לאחר פיתוח נראה כי מתקיים $0<\frac{n^k}{q^n}<\frac{2^k(k+1)!}{\alpha^{k+1}}\cdot\frac{1}{n}$, ושוב, ע"פ למת הסנדוויץ', מתקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{q^n}=0$.

5) $x_n\coloneqq\frac{q^n}{n!}$ נבדוק אם היא מונוטונית יורדת. מתקיים כי $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{q^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{q^n}<1$, ולכן קיים גבול שהוא L מסויים. מתקיים כי הגבול ממשי, $x_{n+1}=\frac{q}{n+1}x_n$, ואז $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q}{n+1}x_n=0\cdot L=0$.

<u>עוד על e מספרו של אוילר</u>:

משפט: $e = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$.

הוכחה: נסמן $e_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$. וגם $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, ובצורתו המפורשת $x_n = 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots(1-\frac{n-1}{n})}{n!}$.
ומתקיים כי $x_n \le e_n$. ועי"פ משפט מתקיים $\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} e_n$.

נקבע כי K טבעי, ונקבל כי $x_n \ge 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots(1-\frac{k-1}{n})}{k!}$ וגם n>k. ואז מתקיים $e \ge e_k$.

קיבלנו כי $\lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} e_n$ ואז נקבל כי $\lim_{n\to\infty} x_n = e$

כעת נוכיח כי e אי רציונאלי: ראשית, נבדוק $e - e_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{N!}\right) - (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!})$ כאשר N גדול ממש מn. נקבל כי $e_N - e_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{N!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le \frac{1}{(n+1)!}(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{N-n-1}})$.

מכאן ניתן לראות שמדובר בסכום סדרה הנדסית, ונקבל כי $\frac{1}{n+2}(1 + \frac{1}{(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{N-n-1}}) \le \frac{1}{n+2}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}$.

ונקבל כי $e_N - e_n \le \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$ כאשר N שואף ל∞.

ומכאן שמתקיים $0 < e_N - (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) \le \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$.

<u>משפט</u>: e אי רציוניאלי.

הוכחה: נניח ש$e = \frac{p}{q}$, כאשר p,q ממשיים. נקבל כי $\frac{p}{k} = 1 + \cdots + \frac{1}{n!} + \alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n| < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$. נכפול את שני האגפים ונקבל כי $\underbrace{(n+1)!\frac{p}{q}}_{\text{שלם}} = \underbrace{(n+1)!\left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}_{\text{שלם}} + (n+1)!\,\alpha_n$. אבל $(n+1)!\,\alpha_n$ לא שלם, כי $|\alpha_n(n+1)!| < \frac{1}{n+1}$ בסתירה. לכן e לא רציונאלי. משל. (יותר מזה, e הינו מספר טרנסצנדטי).

<u>גבולות חלקיים</u>:

מה זה בכלל? גבול חלקי זה גבול של תת סדרה.

<u>הגדרה</u>: תת סדרה: נניח שיש לנו סדרה, נבחר ממנה איברים ספציפייםף ונבחר שיטת נומרציה חדשה עבורה. עד שנקבל k איברים. האינדקס של הסדרה החדשה שלנו הוא k. נחזור להגדרה המקורית של סדרה: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ $f(n)=x_n$. נבצע הרכבה ונקבל כי $x_{n_k} = f(n(k))$ כאשר $n(k) = n_k$.

<u>הגדרה</u>: גבול חלקי: $l \in \overline{\mathbb{R}}$ של הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת סדרה $\left\{x_{n_k}\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = l$.

<u>דוגמא</u>: $x_n = (-1)^n$, גבולות חלקיים הם 1, ו-1-.