

חסמים

למה

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים, קיים חסם תחתון.

הוכחה

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ וחסומה מלרע.

נגדיר:

$$B := \{-a \mid a \in A\}$$

נוכיח כי B לא ריקה.

$$A \neq \emptyset$$

לכן, קיים:

$$a \in A$$

לכן, קיים:

$$-a \in B$$

לכן:

$$B \neq \emptyset$$

נוכיח כי B חסומה מלעיל.

A חסומה מלרע, לכן יהי $c \leq A$.

נוכיח כי $B \leq -c$.

יהי $-a \in B$.

c חסם מלרע, לכן:

$$c \leq a$$

לכן:

$$-a \leq -c$$

לכן:

$$B \leq -c$$

לכן, B חסומה מלעיל.

B אינה ריקה וחסומה מלעיל, לכן עפ"י אקסיומת החסם העליון, $s := \sup(B)$ קיים.

נוכיח כי $-s = \inf(A)$.

s חסם עליון, לכן:

$$B \leq s$$

באופן דומה להוכחה הקודמת:

$$-s \leq A$$

יהי $c \leq A$.

נוכיח כי: $c \leq -s$.

באופן דומה להוכחה הקודמת:

$$B \leq -c$$

s חסם עליון, לכן:

$$s \leq -c$$

לכן:

$$c \leq -s$$

לכן:

$$-s = \inf(A)$$

■

משפט (תכונת ארכימדס)

לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$x < n \cdot \varepsilon$$

הוכחה

נניח בשלילה כי קיימים $\varepsilon > 0$ ו- $x \in \mathbb{R}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$n \cdot \varepsilon \leq x$$

לכן:

$$\bigcirc \neq \{n \cdot \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\} \leq x$$

עפ"י אקסיומת החסם העליון, $s := \sup(\{n \cdot \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\})$, קיים s .

לכן עפ"י משפט, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$s - \varepsilon < n \cdot \varepsilon$$

לכן:

$$s < (n + 1) \cdot \varepsilon$$

לכן, s אינו חסם מלעיל (עליון) של הקבוצה: $\{n \cdot \varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$.

סתירה.

לכן, לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$x < n \cdot \varepsilon$$

■

למה

לכל קבוצה $\bigcirc \neq A \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל, קיים מקסימום.

הוכחה

עפ"י אקסיומת החסם העליון $s := \sup(A)$, קיים s .

לכן קיים $n \in A$ כך ש: $s - 1 < s$

$$s - 1 < n$$

לכן, לכל $m \in \mathbb{Z}$:

$$s < n + 1 \leq m$$

לכן:

$$m \notin A$$

לכן:

$$n = \max(A)$$

■

משפט (צפיפות \mathbb{Q} ב- \mathbb{R})

בין כל שני מספרים ממשיים (שונים), קיים מספר רציונאלי.

הוכחה

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, כך ש: $a < b$.

$0 < b - a$, לכן עפ"י תכונת ארכימדס, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$1 < n \cdot (b - a)$$

הקבוצה $\emptyset \neq \{m \in \mathbb{Z} \mid m < n \cdot b\} \subseteq \mathbb{Z}$ וחסומה מלעיל (למשל ע"י $n \cdot b$), לכן עפ"י משפט, $k := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m < n \cdot b\}$ קיים.

אם $k \leq n \cdot a$, אז:

$$k + 1 \leq n \cdot a + 1 < n \cdot b$$

בסתירה למקסימליות k .

לכן: $n \cdot a < k$, ז"א:

$$n \cdot a < k < n \cdot b$$

לכן:

$$a < \frac{k}{n} < b$$

■

למה

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

הוכחה

נניח בשלילה כי:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

לכן, קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$\frac{m}{n} = \sqrt{2}$$

לכן:

$$m^2 = 2n^2$$

לכן, m זוגי.

$$2 \mid m$$

↓

$$4 \mid m^2$$

↓

$$4 \mid 2n^2$$

↓

$$2 \mid n^2$$

↓

$$2 \mid n$$

לכן, n זוגי.

אם נתחיל משבר מצומצם m/n , נקבל סתירה.

לכן:

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

■

הערה

השדה הסדור \mathbb{Q} אינו מקיים את תכונת החסם העליון.

הוכחה

נגדיר:

$$A := \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$$

כלומר:

$$A = \{q \in \mathbb{Q} \mid -\sqrt{2} < q < \sqrt{2}\}$$

נניח בשלילה כי קיים:

$$\mathbb{Q} \ni r := \sup(A)$$

לכן, $A \leq \sqrt{2}$

$$\overset{\in \mathbb{Q}}{r} \leq \overset{\notin \mathbb{Q}}{\sqrt{2}}$$

לכן:

$$r < \sqrt{2}$$

עפ"י צפיפות \mathbb{Q} ב- \mathbb{R} , קיים:

$$r < \overset{\in \mathbb{Q}}{r'} < \sqrt{2}$$

לכן:

$$r'^2 < 2$$

לכן:

$$r' \in A$$

לכן:

$$\sup(A) = r < r' \in A$$

סתירה.

לכן, לא קיים חסם עליון ל- A .



סדרות

הגדרה

ערך מוחלט של מספר ממשי מוגדר ע"י:

$$|x| := \begin{cases} x, & 0 \leq x \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

למה

1. לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

2. אי שוויון המשולש: לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

הוכחה

חלוקה ל-4 מקרים:

1. $0 \leq y < 0 \leq x$

2. $y < 0 < 0 \leq x$

3. $0 \leq y < 0 < x$

4. $y < 0 < 0 < x$



הגדרה

סדרה היא התאמה של מספר ממשי a_n לכל מספר טבעי n .

כלומר, סדרה היא פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, ומסמנים $a_n := f(n)$.

הסדרה:

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

מסומנת:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

ולעתים:

(a_n)

דוגמה

איברים ראשונים	סדרה
$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$	$a_n := \frac{1}{n}$
$-1, 1, -1, \dots$	$a_n := (-1)^n$
$3, 1, 4, \dots$	$a_n := \pi$ - הספרה π בפיתוח העשרוני של π

הגדרה

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת/שואפת לגבול a , אם לכל $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$, מתקיים:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

נסמן:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

דוגמה

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

יהי $\varepsilon > 0$.

נמצא $N \in \mathbb{N}$, כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $N \leq n$, מתקיים:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

↓

$$\left| \frac{1}{n} \right| < \varepsilon$$

↓

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

↓

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

ניקח:

$$\frac{1}{\varepsilon} < N \in \mathbb{N}$$

לכל $N \leq n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

לכן:

$$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

■