סיכום משפטים חשבון אינפיטיסימלי 2:

ליאן קובי

קירוב מקומי של פונקציה ע"י פולינום:

1. אם $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ אז $f^{(k)}(0)=k!\,a_k$ ולכן $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k}$ לכל k=0,1,...,k.

2. אם $g(a)=f(a)=0$ והפונקציות גזירות בסביבה מנוקבת או חד צדדית של a, אז לכל b בסביבה יש נקודה c בין b ל a המקיימת $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)}{g(b)}$

3. **משפט טיילור מקלורן:** נניח ש$f^{(n)}(0)$ קיימת אזי:
   א. קיימת הצגה יחידה כך ש $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+r(x)$ כך ש $\frac{r(x)}{x^n}\xrightarrow[x\to 0]{}0$
   ב. בהצגה זו $a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k}$ לכל k כלומר:

$$f(x)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k}$$

4. **שארית לגראנג':** נניח ש$f^{(n)}$ קיימת ורציפה ב $[0,b]$ וגזירה ב$(0,b)$ לכל $0<x<b$ יש $0<c_x<x$ כך $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ כאשר $\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}=r(x)$

5. **קירוב טיילור מקלורן בנקודה כללית:** הכללה סביב נקודה a כללית- אם $f^{(n)}(a)$ קיימת אזי:
   א. קיימת הצגה יחידה כך ש $\frac{r(x)}{(x-a)^n}\xrightarrow[x\to a]{}0$ ומתקיים:
   $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\ \ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+r(x)$$
   ב. אם $f^{(n)}$ קיימת ורציפה ב $[a,b]$ וגזירה ב(a,b) לכל $a<x<b$ יש $a<c_x<x$ כך ש
   $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$
   כאשר $\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=r(x)$

הבסיס המתמטי של "חקירת פונקציות"

6. תהי f רציפה בקטע פתוח\ סגור אזי היא עולה ממש\ יורדת ממש בקטע אמ"מ $f'(x)\geq 0$ \ $f'(x)\leq 0$ בהתאמה.
7. **משפט פרמה:** אם c נקודת אקסטרימום, אז $f'(c)=0$ או ש $f'(c)$ לא קיימת.
8. תהי f רציפה בסביבת הנקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת, אזי:
   א. אם $f'\geq 0$ בסביבה ימנית של c ו$f'\leq 0$ בסביבה שמאלית של c אז c מינימום.
   ב. אם $f'\leq 0$ בסביבה ימנית של c ו$f'\geq 0$ בסביבה שמאלית של c אז c מקסימום.
   ג. אם $f'\neq 0$ והסימן של f' קבוע בסביבה המנוקבת, אז c איננה נקודת אקסטרמום.
9. תהי f גזירה n פעמים בa ומקיימת $f^{(n)}(a)\neq 0$ וגם $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n+1)}(a)=0$
   א. אם n זוגי אז a מקסימום\ מינימום אם $f^{(n)}(x)<0$ \ $f^{(n)}(x)>0$ בהתאמה.
   ב. אם n אי זוגי אז a אינה אקסטרמום.
10. אם $f''(x)$ קיימת אז אם $f''(a)>0$\$f''(a)<0$ הפונקציה קמורה\ קעורה בהתאמה.
11. אם a נקודת פיתול ו$f''(a)$ קיימת אז $f''(a)=0$.
12. תהי f גזירה $n\geq 3$ פעמים בa ומקיימת $f^{(n)}(a)\neq 0$ וגם $f''(a)=\cdots=f^{(n+1)}(a)=0$
    אז a נקודת פיתול אמ"מ n אי זוגי
13. אם $ax+b$ אסימפטוטה ב $\pm\infty$ אז $\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to\pm\infty]{}a$ וגם $f(x)-ax\to b$
14. אם g פונקציה קדומה של f אז גם $g+c$ פונקציה קדומה של f

האינטגרל הלא מסוים, שיטות אינטגרציה:

15. האינטגרלים המידיים:

א. $\int 0dx = c$

ב. $\int x^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$:עבור $\alpha \neq -1$

ג. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c$

ד. $\int e^{x}dx = e^{x} + c$

ה. $\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln(a)} + c$

ו. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

ז. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

ח. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tanx$

ט. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -cotx$

י. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsinx + c = -arccosx + c$

יא. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctanx + c = -arccotx + c$

יב. $\int \frac{1}{x-a}dx = ln|x-a|$

יג. $\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = \frac{1}{(1-k)(x+a)^{k-1}}$

יד. $\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}dx = ln|x^2+bx+a|$

טו. $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^k}dx = \frac{1}{(1-k)(x^2+bx+c)^{k-1}}$

16. **תיקון קבועים מיידי:** אם $\int f(x)dx = g(x) + c$ אז $\int f(ax+b)dx = \frac{g(ax+b)}{a} + c$

17. כשהמונה הוא נגזרת המכנה:

א. $\int tanxdx = -ln|cosx| + c$

ב. $\int cotxdx = ln|sinx| + c$

ג. $\int \frac{dx}{sinx} = ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + c$

18. **לינאריות:** $\int \alpha f + \beta g = \alpha \int fdx + \beta \int gdx + c$

19. **אינטגרציה בחלקים:** עבור פונקציות גזירות u, v מתקיים $\int udv = uv - \int vdu$

20. **הצבה:** יהיו I, J קטעים מוכללים.

א. <u>הצבה:</u>

אם $u: I \to J$ גזירה אז $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du = \int f(t)dt$ עבור $t = u(x)$

ב. <u>הצבה הפוכה:</u>

אם $v: J \to I$ מונוטונית ממש, גזירה, ועל אז $\int f(x)dx = \int f(v(t))v'(t)dt$

21. זהויות טריגונומטריות לצורך טינגרול:

א. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ב. $tanx = \frac{sinx}{cosx}, cotx = \frac{cosx}{sinx}$

ג. $tanxcotx = 1$

ד. $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

ה. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

ו. $\sin(\pi - x) = \sin(x), \cos(\pi - x) = -\cos(x)$

ז. $\sin(x-y) = sinxcosy - sinycosx, \sin(x+y) = sinxcosy + sinycosx$

$\cos(x+y) = cosxcosy - sinxsiny, \cos(x+y) = cosxcosy - sinxsiny$

ח. $sin2x = 2sinxcosc$

ט. $cos2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

22. **הצבה טריגונומטרית:**

$$u=\tan\left(\frac{x}{2}\right), dx=\frac{2}{1+u^2}du, cosx=\frac{1-u^2}{1+u^2}, sinx=\frac{2}{1+u^2}du$$

23. **הצבות בשביל להיפטר משורשים:**
   א. $\sqrt{a^2-x^2}$ נציב $x=asint$ לכן $dx=acostdt$
   ב. $\sqrt{a^2+x^2}$ נציב $x=atant$ לכן $dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$
   ג. $\sqrt{x^2-a^2}$ נציב $x=\frac{a}{cost}$ לכן $dx=\frac{asint}{\cos^2 t}dt$

24. **הצבת אוילר:** עבור פונקציות רציונליות עם $\sqrt{ax^2+bx+c}$
   א. אם הפול' בשורש פריק ושווה ל$a(x-\alpha)*(x-\beta)$ נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=u(x-\alpha)$
   מכאן נמצא dx ונפתור.
   ב. אחרת נחלק ל2 מקרים:
   אם $a>0$: נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+u$
   אם $c>0$: נציב $\sqrt{ax^2+bx+c}=ux+\sqrt{c}$

25. **אינטגרל של פונקציה רציונלית:**
   פונקציה $\mathrm{R}(x)$ היא רציונאלית אם היא מהצורה $\mathrm{R}(x)=\frac{Q(x)}{p(x)}$ $P(x),Q(x)$ פול".
   האלגוריתם-
   1. אם *deg(Q(x))≥ deg(P(x))* נבצע חילוק פול".
   2. נבצע פירוק לשברים חלקיים בצורה הבאה-
      א. נפרק מונה לגורמים אי פריקים.
      ב. נכתוב ביטוי כסכום של מכנים אי פריקים כאשר מונה נקבע באופן הבא-
         i- גורם אי פריק לינארי מקבל קבוע במונה.
         ii- גורם אי פריק ריבועי מקבל ביטוי לינארי במונה (Ax+B).
         iii- גורם אי פריק לינארי בחזקת k מתפרק לסכום החזקות עד אליו-

$$\frac{1}{(x-a)^k}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{K}{(x-a)^k}$$

האינטגרל המסוים, סכומי רימן דרבו:

26. לכל סדרת חלוקות $\mathrm{P}_n\to 0$ מתקיים $\sigma(P_n)\to\gamma$ ⟺ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta<0$ כך שלכל חלוקה מנוקדת P עם $\lambda(\mathrm{p})<\delta$ מתקיים $\varepsilon>|\sigma(P)-\gamma|$

27. כל פונקציה אינטגרבילית בקטע היא חסומה שם.
28. עבור סכומים של פונק בין a ל b מתקיים $(b-a)\alpha\le\underline{S}(\mathrm{P})\le\overline{S}(P)\le(\mathrm{b}-\mathrm{a})\beta$
29. תהי P חלוקה קבועה, תהי R אוסף כל סכומי הרימן $\sigma(P)$ עבור כל הניקודים האפשריים של P אזי $\underline{S}(\mathrm{P})=\inf R,\overline{S}(P)=\sup R$

30. **למת העידון:** אם $\mathrm{P}\subseteq\mathrm{Q}$ אז מתקיימים:
   - $\underline{S}(\mathrm{P})\le\underline{S}(\mathrm{Q})$
   - $\overline{S}(Q)\le\overline{S}(P)$

$$\overline{S}(P)-\overline{S}(Q),\underline{S}(\mathrm{Q})-\underline{S}(\mathrm{P})\le\left|\frac{Q}{P}\right|*\lambda(P)*\omega$$

31. לכל 2 חלוקות Q,P של אותו הקטע $\underline{S}(P)\le\overline{S}(Q)$
32. **משפט דרבו:** $\underline{\int_a^b} fdx=\lim_{P\to 0}\underline{S}(P)$,$\overline{\int_a^b} fdx=\lim_{P\to 0}\overline{S}(P)$

33. f אינטגרבילית ⟺ חסומה, והאינטגרל העליון והתחתון שווים.

34. שקילות התכונות הבאות:
    א. f אינטגרבילית ב$[a,b]$.
    ב. f חסומה בקטע ויש חלוקות P_n שעבורן $\lim_{n\to\infty}(\Delta_1\omega_1+\Delta_2\omega_2+\cdots+\Delta_k\omega_k)=0$
    ג. f חסומה בקטע ולכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P שעבורה $\Delta_1\omega_1+\Delta_2\omega_2+\cdots+\Delta_k\omega_k<\varepsilon$

35. כל פונקציה רציפה בקטע סגור אינטגרבילית בו.
36. כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור אינטגרבילית שם.

כיסויים פתוחים וקבוצות אפסיות:

37. **משפט היינה בורל:** לכל כיסוי פתוח של קטע סגור יש תת כיסוי סופי, ובפירוט:
אם $[a,b]\sqsubseteq\bigcup_{\alpha\in A}(a_\alpha,b_\alpha)$ איחוד של אינסוף קטעים פתוחים, אז יש $\alpha_1,\ldots\alpha_k\in A$ כך ש
$[a,b]\sqsubseteq\left(a_{\alpha_1},b_{\alpha_1}\right)\cup\ldots\cup\left(a_{\alpha_k},b_{\alpha_k}\right)$

38. לכל כיסוי פתוח של קבוצה ממשית $A\subseteq\bigcup_{\alpha\in I}(a_\alpha,b_\alpha)$ יש תת כיסוי בן מנייה.
39. כל תת קבוצה של קבוצה אפסית היא אפסית.
40. כל קבוצה בת מניה היא אפסית.
41. איחוד בן מניה של קבוצות אפסיות הוא קבוצה אפסית.
42. קטע $[a,b]$ אינו קבוצה אפסית.

43. תהי $f\geq 0$ ב$[a,b]$, ו$\int_a^b fdx=0$ אז לכל $c>0$, מתקיים $f(x)\leq c$ כמעט בכל הקטע.
44. אם $f\leq g$ בקטע $[a,b]$ ו$\int_a^b fdx=\int_a^b gdx$ אז $f=g$ כמעט בכל הקטע.

משפט לבג:

45. **לבג חלק I:** אם f אינטגרבילית ב$[a,b]$ אז f רציפה כב"ה.
46. **לבג חלק II:** תהי f חסומה ב$[a,b]$, אם f רציפה כב"ה אז f אינטגרבילית.

תכונות בסיסיות של האינטגרל המסוים:

47. אם f אינטגרבילית ב$[a,b]$ ו$f=g$ פרט למספר סופי של נקודות אז $\int_a^b fdx=\int_a^b gdx$

48. חשבון אינטגרלים מסוימים:
    א. אם f,g אינטגרביליות ב$[a,b]$ אז גם המכפלה $f*g$ אינטגרבילית בקטע.
    ב. אם f,g אינטגרביליות ב$[a,b]$ וגם $0<c\leq|g(x)|$ אז המנה $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית בקטע.
    ג. אם f אינטגרבילית ב[a,b] אז היא אינטגרבילית לכל תת קטע [c,d]⊂ [a,b].

49. לכל a,b,c כך שהפונקציה אינטגרבילית בקטעים $\int_a^b fdx=\int_a^c fdx+\int_c^b fdx$
50. אם $f\leq g$ אינטגרבילית ב[a,b], אז $\int_a^b fdx\leq\int_a^b gdx$
51. אם f אינטגרבילית ב[a,b], אז גם $|f|$ אינטכגרבילית בקטע ומתקיים $\left|\int_a^b fdx\right|\leq\int_a^b|fdx|$

52. **משפט הערך הממוצע האינטגרלי:**
תהי f רציפה ב$[a,b]$, $g\leq 0/g\geq 0$ בקטע ואינטגרבילית אז קיימת $a\leq c\leq b$ כך ש
$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(c)\int_a^b g(x)$

53. אם f אינטגרבילית ב[a,b] אז $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ רציפה.

המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי:

54. **המשפט היסודי:** תהי f אינטגרבילית ב $[a,b]$ ותהי $\varphi(x)=\int_a^x f(t)dt$ אזי $\varphi'(x)=f(x)$.
55. **הנוסחה היסודית-** ניוטון-לייבניץ: אם f אינטגרבילית ב[a,b], φ רציפה בקטע, פרט למספר ספי של נקודות היא גזירה בפנים הקטע וגם $\varphi'(x)=f(x)$ אז $\int_a^b fdx=\varphi(b)-\varphi(a)$

56. **מסקנה ממשפט ניוטון-לייבניץ:** אם $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$ אז $f'(x) = f(\beta(x)) * \beta'(x) - f(\alpha(x)) * \alpha'(x)$

שיטות אינטגרציה אינטגרלים מסוימים:

57. **חלקים:** עבור פונקציות גזירות ברציפות u, v בקטע סגור $[a, b]$: $\int_a^b udv = uv\,|_a^b - \int_a^b vdu$

58. **הצבה:** יהיו $u: [a, b] \to im(u)$ פפונקציה גזירה, ו f רציפה ב$im(u)$ אזי:
$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt, t = u(x)$

59. F אינטגרבילית ב$[a, b]$ ו $u: [a, b] \to im(u)$ גזירה ברציפות ומונוטונית ממש:
$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx$

אינטגרלים לא אמיתיים:

60. לינאריות עבור אינטגרלים לא אמיתיים: אם g, f אינטגרביליות ב$[a, \infty)$ אז לכל שני מספרים α, β מתקיים $\int_a^\infty (\alpha f + \beta g)dx = \alpha \int_a^\infty fdx + \beta \int_a^\infty gdx$
61. לכל $c > a$ מתקיים $\int_a^\infty fdx = \int_a^c fdx + \int_c^\infty gdx$ במובן שאם אחד קיים גם השני .

62. קיום $\int_a^\infty fdx$ תלוי רק בזנב, הבאים שקולים:
    א. $\int_a^\infty fdx$ קיים.
    ב. $\int_c^\infty fdx$ לאיזשהו $a \le c$.
    ג. $\int_c^\infty fdx$ לכל $a \le c$.

63. לכל a, $\int_{-\infty}^\infty fdx = \int_{-\infty}^a fdx + \int_a^\infty fdx$
64. עבור פונקציה $f \ge 0$ אינטגרבילית לכל $b > a$, $0 \le \int_a^\infty fdx \le \infty$ קיים במובן ברחב.

65. **מבחן ההשוואה:** יהיו $0 \le f \le g$ בקרן $[a, \infty)$, אזי $\int_a^\infty fdx \le \int_a^\infty gdx$ בפרט:
    א. אם $\int_a^\infty gdx < \infty$ אז גם $\int_a^\infty fdx < \infty$
    ב. אם $\int_a^\infty fdx = \infty$ אז גם $\int_a^\infty gdx = \infty$

66. **מבחן ההשוואה הגבולי:** היו $0 \le f, g$ בקרן $[a, \infty)$, אם $c = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים אז:
    א. אם $0<c<\infty$: אז $\int_a^\infty fdx, \int_a^\infty gdx$ מתכנסים ומתבדרים יחד.
    ב. אם $c=\infty$: אם $\int_a^\infty fdx$ מתכנס אז $\int_a^\infty gdx$ מתכנס.
    ג. אם $c=0$: אם $\int_a^\infty gdx$ מתכנס אז $\int_a^\infty fdx$ מתכנס.

67. **הקריטריון של קושי:** תהי f אינטגרבילית ב $[a, b]$ לכל $b > a$:
$\int_a^\infty fdx$ קיים $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים c כך ש $\left|\int_{b_1}^{b_2} fdx\right| \le \varepsilon$ לכל $c \le b_1 < b_2$

68. אינטגרל המתכנס בהחלט-> מתכנס.

69. **מבחן דיריכלה:** אם f, g אינטגרביליות בקרן וגם $g(x) \to 0$ וגם מונוטונית אז-
$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס

70. **מבחן האינטגרל:** תהי f חיובית יורדת אזי $\sum_{n=k+1}^\infty f(n) \le \int_k^\infty fdx \le \sum_{n=k}^\infty f(n)$ כלומר מתכנסים ומתבדרים יחד.

71. אם $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$ נקודות סינגולריות של f בקטע $[a,b]$ אז
$\int_a^b fdx = \int_a^{s_1} fdx + \int_{s_1}^{s_2} fdx + \cdots \int_{s_{k-1}}^{s\_k} fdx$

72. עבור פונקציה אינטגרבילית ב $[a,b]$ מתקיים $\int_a^b f \xrightarrow[t\to a]{} \int_t^b f$, $\int_a^b f \xrightarrow[t\to b^-]{} \int_a^t f$

73. קשר בין אינטגרלים לא אמיתיים מסוג ראשון לשני:
אם a נקודה סינגולרית יחידה של f ב$[a,b]$ והפונקציה אינטגרבילית בכל תת קטע סגור אז:

$$\int_a^b f dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{f\left(a+\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt$$

התכנסות במ"ש של סדרות וטורי פונקציות:

74. התכונות הבאות שקולות:
א. $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ *במ"ש בתחום X.*
ב. *קיימת סדרה* $\epsilon_n \to 0$ *כך שלבסוף* $\epsilon_n \geq |f_n(x) - f(x)|$
ג. *הסדרה שואפת לאפס:* $\epsilon_n = \begin{cases} \sup|f_{n(x)} - f(x)|, & \text{אם קיים} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$

75. קריטריון קושי :
א. $f_{n(x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ במ"ש ב-*X*.
ב. לכל $0 < \varepsilon$ קיים *N* כך לכל *m>n>N* מתקיים: ε> $|f_n(x) - f_m(x)|$

76. התכונות הבאות שקולות:
א. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב-*X*.
ב. סדרת השאריות $\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x) = r_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
ג. קריטריון קושי: לכל $0 < \varepsilon$ קיים *N* כך לכל $N \leq k_1 \leq k_2$ מתקיים ε> $\left|\sum_{n=k_1+1}^{k_2} f_n(x)\right|$ ל*X*.

77. מבחן החסם של ווירשטראוס:
אם $|f_n(x)| < a_n$ לכל $x \in X$ ו$\sum_n a_n < \infty$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ מתכנס במ"ש ב-*X*.

התכנסות במ"ש היא ממש שווה:

78. גבול במ"ש של פונקציות רציפות ב *a* רציף ב*a*.
79. גבול במ"ש של פונקציות רציפות בקטע היא פונקציה רציפה בקטע ומתקיים-
$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$
80. אם טור רציפות מתכנס במ"ש בקטע, סכומו הוא פונקציה רציפה בקטע ומתקיים-

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

81. **משפט דיני:** אם $f(x) \searrow_{n\to\infty} f_n(x)$ בקטע סגור [a,b] והפונקציות רציפות בו (גם פונקצית הגבול) אז ההתכנסות היא במ"ש.

82. עבור פונקציות רציפות אי שליליות בקטע סגור- התכנסות לפונקציה רציפה ⇔ התכנסות במ"ש.
83. גבול במ"ש של סדרת פונקציות חסומות בתחום היא פונקציה חסומה בתחום.
84. גבול במ"ש של סדרת פונקציות אינטגרביליות בקטע סגור היא פונקציה אינטגרבילית בקטע.

אינטגרציה וגזירה איבר איבר:

85. אינטגרציה איבר איבר:
א. פונקציות: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(x)$ עבור $f_n \underset{\to}{\to} f$ במ"ש ו f_n אינטגרביליות בקטע.
ב. טורים: $\int_a^b \sum_n f_n(x) = \sum_n \int_a^b f_n(x)$, עבור $s(x) = \sum_n f_n(x)$ במ"ש ו f_n אינטגרביליות בקטע.

86. **גזירה איבר איבר:**

א. פונקציות: אם בקטע [a,b] ‎1. f_n גזירות וf'_n מתכנסות במ"ש. 2. יש לפחות נקודה אחת c בה $f_n(c)$ מתכנסת מתקיים: 1. f_n מתכנסות במ"ש ל f .2 f'_n מתכנסות במ"ש לf' .

ב. טורים: אם בקטע [a,b] ‎1. f_n גזירות ו$\sum_n f_n'$ מתכנס במ"ש. 2. יש לפחות נקודה אחת c בה $\sum_n f_n$ מתכנס אז מתקיים: 1. $\sum_n f_n$ מתכנס במ"ש בקטע. 2. $\sum_n f_n' = (\sum_n f_n)'$

טורי חזקות:

87. כל טור חזקות מתכנס בנקודה 0.
88. טור חזקות המתכנס בנקודה α מתכנס בהחלט בקטע $(-|\alpha|, |\alpha|)$
89. לכל טור חזקות יש מספר $0 \le r \le \infty$ כך שהטור מתכנס בהחלט עבור $|x| < r$, ומתבדר עבור $|x| > r$, בנקודה r ייתכנו כל האפשרויות (ייתכן שיתכנס וייתכן שלא).

90. $r = \frac{1}{\lim sup \sqrt[n]{|a_n|}}$
91. אם הגבול $lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ קיים אז הוא רדיוס ההתכנסות.

92. טור חזקות מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו.
93. טור חזקות הוא פונקציה רציפה בכל תחום התכנסותו.

94. אם טור חזקות מתכנס במ"ש בקטע-

א. מהצורה $(r-\delta, r), \delta > 0$ אז הוא מתכנס בr.

ב. מהצורה $(-r, -r+\delta), \delta > 0$ אז הוא מתכנס ב-r.

ג. (-r,r) אז תחום התכנסותו הוא [-r,r].

95. אינטגרציה וגזירה איבר איבר:

א. לטורים $\sum a_n x^n, \sum a_{n+1}(n+1)x^n, \sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, אותו רדיוס התכנסות.

ב. תחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$ מוכל בתחום ההתכנסות של $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

ג. תחום ההתכנסות של $\sum a_{n+1}(n+1)x^n$ מוכל בתחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.

לכן ניתן לבצע גזירה איבר איבר של טור חזקות כמה שנרצה מבלי לשנות את רדיוס התכנסותו.

הצגת פונקציות בסכום של טור חזקות- טורי טיילור- מקלורן:

96. אם $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ בסביבה של הנקודה 0 אז $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
97. **תנאי מספיק להצגת פונקציה בסכום טור חזקות:** אם בקטע $[-a, a]$ הפונקציה f גזירה מכל סדר ויש קבוע c כך ש$|f^n(x)| \le c$ לכל x,n אז $f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
98. מספיק $\frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במ"ש כדי שתהיה הצגה כסכום של טור חזקות.