שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: פרופ' מגרל
מתרגלים: מני וסולי

תרגיל בית מספר 10

שאלה 1:

יהי X מ"ט קומפקטי . יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \varnothing$.

שאלה 2:

מרחב טופולוגי X נקרא **נתרי** אם לא קיימת בו סדרה אינסופית של קבוצות סגורות A_i כך ש $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ (הכלה ממש).

הראו שכל מרחב טופולוגי נתרי הוא קומפקטי.

שאלה 3:

יהי $A\subseteq\mathbb{R}^2$ תת המרחב: $A=\left([1,5]\times[2,6]\right)\setminus\left((2,4)\times(3,5)\right)$. הוכיחו:

א. A הוא תת-מרחב קומפקטי וקשיר.

ב. תהי $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה. הראו כי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(A)=[a,b]$ (כלומר, תמונת f היא קטע סגור).

שאלה 4:

יהי (X,d) מ"מ. $A,C\subseteq X$ לא ריקות. C קומפקטי, A סגורה . הוכיחו:

$d(C,A)=0 \Leftrightarrow C\cap A\neq\varnothing$.

שאלה 5:

יהי X מרחב קומפקטי מקומית והאוסדורף. הוכיחו שהוא מרחב $T_{3\frac{1}{2}}$. רמז: קומפקטיפיקצית הנקודה.

שאלה 6:

א. יהיו X,Y מ"ט. יהיו $F\subseteq X, G\subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F\times G$ סגורה ב- $X\times Y$.
ב. יהיו X,Y מ"ט, $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B}$.
ג. הוכיחו שאם X,Y מ"ט ספרביליים אז $X\times Y$ ספרבילי.

<u>בונוס:</u> (ראו שאלה 3 עבור הגדרת נתריות).

1. הראו שתכונת נתריות היא תורשתית.
2. הראו שמרחב נתרי האוסדורף הוא בהכרח קבוצה סופית עם הטופולוגיה הדיסקרטית.

בהצלחה!