תרגול 12 – טופולוגיה 2014

**תרגיל**

נגדיר יח"ש על : . מצאו לְמה הומיאומורפי .

פתרון

נרצה להראות ש-.

לשם כך נגדיר פונקציה  על-ידי:  (להסביר מדוע זה הומיאומורפי דווקא לדיסק ולא לכל המישור: נסתכל על התמונה של הפונקציה; להסביר מדוע זה מוכל בדיסק ולא יוצא החוצה).

 מקיימת:  ולכן היא מגדירה פונקציה חח"ע . נרצה להראות ש- הומיאומורפיזם.

*  רציפה (פונקציה לתוך מרחב מכפלה רציפה אמ"מ היא רציפה רכיב-רכיב, ואצלנו כל רכיב הוא צמצום של הטלה) ולכן  רציפה.
* **על** (עבור  נבחר את השורש החיובי של  ונקבל ) ולכן **על**.
*  סגורה (כפונקציה רציפה מקומפקטי להאוסדורף) ולכן בסה"כ נקבל ש- מנה, ולכן גם  מנה.

מכיוון ש- מנה וגם חח"ע, נקבל שהיא הומיאומורפיזם, כנדרש.

הערה: ניתן להוכיח ש- היא הומיאומורפיזם גם ללא שימוש בכך ש-היא העתקת מנה. מכיון ש  רציפה ו- קומפקטי (על-פי היינה-בורל) אז גם  קומפקטי.  הפיכה (מנימוקים שכבר ציינו) ורציפה מקומפקטי להאוסדורף ולכן הומיאומורפיזם.

מש"ל

**תרגיל** (מבחן מתאריך 30-06-2004)

על  נגדיר את יחס השקילות הבא: . הראו כי .

פתרון

נוכיח תחילה כי . אנו מחפשים פונקציה  המקיימת . המועמד הטבעי הינו . נשים לב שזאת פונקצית **על** הקטע .

נשים לב ש- קומפקטי והאוסדורף, אך  אינו קומפקטי. בגלל ההומיאומורפיזם הרצוי אנו מבינים ש- קומפקטי. נוכיח זאת:

נתבונן בפונקציה . זו פונקציה רציפה ו**על**.  קומפקטי ולכן  קומפקטי.

כעת,  רציפה (מכיוון ש- רציפה) וחח"ע (בגלל הגדרת יחס השקילות). כמו כן **על** מכיוון ש-**על**. כלומר, בסה"כ, יש לנו פונקציה  רציפה והפיכה מקופמקטי להאוסדורף ולכן  הומיאומורפיזם. לכן  ומכיוון ש- נקבל את הדרוש.

מש"ל

**תרגיל**

מוטיבציה: נראה דוגמה למרחב מטריזבילי כך שיש לו מרחב מנה שאינו מטריזבילי.

נתבונן במרחב שרפינסקי (Sierpinsky). זהו המרחב עם הטופולוגיה .

1. הוכיחו שמרחב שרפינסקי אינו מטריזבילי.
2. יהי ותהי  מוגדרת על-ידי .

נגדיר יחס שקילות על  באופן הבא: הוכיחו כי הומיאמורפי למרחב שרפינסקי.

1. הסיקו שהעתקת מנה אינה שומרת על מטריזביליות.

פתרון

1. כל מרחב מטרי הינו האוסדורף; עם זאת מרחב שרפינסקי אפילו לא שכן ****אינו סגור.
2. נתבונן בתרשים הבא:



נשים לב כי  חח"ע. כעת, נראה ש- מנה ולכן גם  תהיה מנה (ולכן, מכיוון שהיא חח"ע, היא תהיה הומיאומורפיזם).

תהי  פתוחה וצ"ל כי  פתוחה. האפשרויות עבור  הן  ועבור כל אחת מהן התמונה ההפוכה פתוחה.

תהי . נניח ש- פתוחה ונראה ש- פתוחה. מספיק להראות ש-. נניח בשלילה כי , אזי  וזאת סתירה שכן  אינה פתוחה ב-. לכן .

מכאן מנה ולכן  הומיאומורפיזם.

1.  מטריזבילי, ואילו  אינו מטריזבילי (עיינו בסעיף א').

מש"ל

**מבחן 2011, מועד ב', שאלה 4**

יהי מרחב . הראו שלכל יש קבוצות פתוחות כך ש-וכן .

**תשובה**

טענת עזר

יהי מרחב . נניח ש- קבוצה פתוחה ב- ו-, אזי קיימתסביבה פתוחה של כך ש-.

הוכחת טענת עזר

מהנתון סגורה וכן . מכיון שהמרחב  קיימות  פתוחות וזרות כך ש-.כעת, ולכן ומכיון ש-סגורה נקבל לבסוף: **.**

מש"ל טענת עזר

יהיו . המרחב  הוא  ולכן הוא  ולכן קיימות  פתוחות וזרות כך ש-. המרחב  הוא , עפ"י טענת העזר קיימת סביבה של  המקיימת  וכן קיימת סביבה של  המקיימת . מתקיים  ולכן .

מש"ל