

שאלה 1

א. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$
ב. $2\left(x^2 + 2x + \frac{5}{2}\right) = 2\left((x+1)^2 + \frac{3}{2}\right)$
ג. $7\left(x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{100}{7}\right) = 7\left(\left(x + \frac{1}{14}\right)^2 + \frac{100}{7} - \frac{1}{196}\right)$

שאלה 2

1. $x^2 + 4x - 1$
2. $3x^2 - 15x + 75 - \frac{375}{x+5}$
3. $1 + \frac{-3x^2+4x-1}{x^3-x}$

שאלה 3

1) מעלת המונה איננה קטנה ממעלת המכנה לכן נבצע ראשית חילוק פולינומים: מקבלים

$$\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 3}$$

כעת,

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$$

$$\frac{2x - 3}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1}$$

כלומר

$$2x - 3 = A(x - 1) + B(x - 3)$$

כלומר $A = \frac{3}{2}, B = \frac{1}{2}$ וסה"כ הפירוק הוא

$$1 + \frac{\frac{1}{2}}{x - 3} + \frac{\frac{3}{2}}{x - 1}$$

2) מעלת המונה איננה קטנה יותר ממעלת המכנה לכן נבצע חילוק פולינומים ונקבל

$$x - 6 + \frac{26x + 60}{x^2 + 6x + 10}$$

המכנה הוא אי-פריק (דיסרמיננטה שלילית) לכן זהו הפירוק לשברים חלקיים.

$$\frac{x^2+1}{x^2+6x+9} \quad (3)$$

פתרון:

כמו בדוגמה הקודמת נשים לב שמעלת המונה שווה למעלת המכנה ולכן לאחר חילוק פולינומים נקבל:

$$\frac{x^2+6x+9-6x-8}{x^2+6x+9} = 1 - \frac{6x+8}{(x+3)^2}$$

נזכר של עבור כל חזקה של $(x+3)$ יש שבר חלקי כלומר:

$$\frac{6x+8}{(x+3)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{(x+3)^2}$$

$$6x+8 = A(x+3) + B$$

לאחר פתרון נקבל: $A = 6, B = -10$

ולכן הפירוק הוא $1 - \frac{6}{x+3} + \frac{10}{(x+3)^2}$

(4) פירוק המכנה לגורמים $(x-2)(x-3)$ לכן מקבלים

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$$

$$\frac{11x+17}{2x^2+7x-4} \quad (5)$$

פתרון:

$$2x^2 + 7x - 4 = (x - \frac{1}{2})(x + 4)$$

$$\frac{11x+17}{(x-\frac{1}{2})(x+4)} = \frac{2(11x+17)}{(2x-1)(x+4)} = 2 \cdot \left(\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+4} \right)$$

$$11x + 17 = 2A(x + 4) + 2B(2x - 1)$$

$$A = \frac{5}{2}, B = \frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{2x-1} + \frac{3}{x+4} \quad \text{ולכן}$$

שאלה 4

1. אחרי חילוק פולינומים נשארים עם:

$$\int dx - \int \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

הראשון כמובן x , לחישוב השני נפרק את המכנה לגורמים אי-פריקים (לפי משוואה דו-ריבועית) ונבצע פירוק לשברים חלקיים:

$$\int \frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \int \frac{5x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx = \frac{16}{3} \int \frac{1}{x^2 + 4} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

סה"כ מקבלים

$$x - \frac{8}{3} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{3} \arctan(x) + C$$

2. פירוק המכנה לגורמים $(x^2 + 1)(x^2 + 4)$ (לפי משוואה דו-ריבועית) אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{3} \int \frac{5x + 3}{x^2 + 1} dx - \frac{5}{3} \int \frac{x}{x^2 + 4} dx$$

סה"כ מקבלים:

$$\frac{5}{6} (\ln(x^2 + 1) - \ln(x^2 + 4)) + \arctan(x) + C$$

3. פירוק המכנה לגורמים אי-פריקים: $\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx$$

סה"כ האינטגרל:

$$\frac{1}{4} \ln|x-1| - \frac{1}{4} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \arctan(x) + C$$

4. אחרי חילוק פולינומים: $2 + \frac{3x^2 - x + 2}{x^3 - 8}$

נטפל באינטגרל של השבר: פירוק שלו לגורמים (לפי הנוסחא של $a^3 - b^3$): $(x-2)(x^2+2x+4)$

אחרי פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{2x+1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2}$$

סה"כ האינטגרל:

$$2x + \ln|x^2 + 2x + 4| - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + \ln|x-2| + C$$

5. פירוק המכנה לגורמים אי-פריקים (לפי ההדרכה שפורסמה): $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

לאחר פירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx - \frac{1}{\sqrt{8}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

סה"כ מקבלים:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|x^2 + \sqrt{2}x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln|x^2 - \sqrt{2}x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - 1)$$

.6

$$3\ln|x - 3| - 2\ln|x - 2| + C \quad .7$$

$$3\ln|x + 4| + \frac{5}{2}\ln|2x - 1| + C \quad .8$$

$$\ln|x| + 2\ln|x + 3| - \ln|x - 3| + C \quad .9$$

.10 אחרי חילוק פולינומים:

$$3 + \frac{12x - 22}{x^2 - 4x + 4}$$

נטפל בשבר: המכנה מתפרק ל- $(x - 2)^2$. פירוק לשברים חלקיים

$$\frac{12}{x - 2} + \frac{2}{(x - 2)^2}$$

סה"כ מקבלים

$$3x + 12\ln|x - 2| - \frac{2}{x - 2} + C$$

$$.11 \text{ אחרי חילוק פולינומים } x + 3 + \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2}$$

נטפל בשבר הימני. פירוק המכנה $(x - 2)(x - 1)$. אחרי שברים חלקיים

$$\frac{8}{x - 2} - \frac{1}{x - 1}$$

סה"כ מקבלים

$$\frac{x^2}{2} + 3x + 8\ln|x - 2| - \ln|x - 1| + C$$

$$.12 \text{ תשובה סופית } \frac{x^3}{3} + x - \ln|x| + \ln|x + 1| + 2\ln|x - 1| + C$$

.13 אחרי חילוק פולינומים

$$2 + \frac{2x + 3}{x(x - 1)}$$

תשובה סופית

$$2x - 3\ln|x| + 5\ln|x - 1| + C$$

.14 המכנה כבר מפורק. אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$-\int \frac{1}{x + 1} dx + 2 \int \frac{1}{x - 3} dx - \int \frac{1}{(x - 3)^2} dx$$

סה"כ

$$-\ln|x+1| + 2\ln|x-3| + \frac{1}{x-3} + C$$

15. המכנה כבר מפורק, אחרי פירוק לשברים חלקיים:

$$-\frac{14}{17} \int \frac{1}{4x-1} dx + \frac{3}{17} \int \frac{4x+1}{x^2+1} dx$$

סה"כ

$$-\frac{7}{34} \ln|4x-1| + \frac{6}{17} \ln|x^2+1| + \frac{3}{17} \arctan(x) + C$$

16. נבצע חילוק פולינומים. המכנה כבר אי-פריק. סה"כ מקבלים

$$\frac{x^2}{2} - 3x + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C$$

שאלה 5 (תרגיל רשות – לא להגשה)

ראינו שכל אינטגרל של פונקציה רציונלית ניתן ע"י חילוק פולינומים ופירוק לשברים חלקיים להביא לאחד מ-4 סוגי אינטגרלים (n מספר טבעי):

$$\int \frac{A}{ax+b}, \int \frac{A}{(ax+b)^n}, \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}$$

ראינו איך מטפלים ב-3 הראשונים. מטרת שאלה זו להדריך אתכם להגיע לנוסחה לפתרון האינטגרל הרביעי.

א. הראו כי עבור $a > 0$, מתקיים $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

ב. כעת חשבו את האינטגרל מסעיף א' בדרך נוספת, ע"י אינטגרציה בחלקים, כאשר $u = \frac{1}{x^2+a^2}$ ו- $v' = 1$.

ג. בסעיף ב' לאחר אינטגרציה בחלקים מקבלים בצד ימין את האינטגרל $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$. ע"י הוספת והחסרת a^2

מהמכנה, הציגו אותו ע"י אינטגרל ידוע + $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$ (כפול קבוע).

ד. כמסקנה מסעיפים א'-ג' מקבלים כי כעת יש לנו נוסחא לחישוב $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx$.

ה. הכלילו את התהליך לעיל: כדי למצוא איך לחשב את $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ מתחילים עם $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx$ ועושים עליו אינטגרציה בחלקים עם $v' = 1$. כך מקבלים ביטוי עבור $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$ באמצעות $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} dx$. כלומר אם אנחנו יודעים לפתור את האינטגרל הזה עבור n מסוים אנחנו יודעים לפתור אותו גם עבור $n+1$, וכיוון שאנחנו יודעים לפתור את הראשון (סעיף א'), אנחנו יודעים כעת לפתור כל אינטגרל מהצורה $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$.

ו. כעת נעבור לפתרון $\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n} dx$. ראשית ניתן להניח כי $a = 1$ (אחרת הוציאו אותו גורם משותף ואז מחוץ לאינטגרל).

ז. כעת בצעו השלמה לריבוע במכנה ואחריה הציבו $t = x + \frac{b}{2}$.

ח. את האינטגרל שהתקבל ניתן להפריד לשני אינטגרלים, אחד מהם נפתר ע"י הצבה והשני הוא האינטגרל שפתרנו בסעיפים א'-ה'.