בדידה הרצאה 6

<u>תזכורת:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. R נקרא יחס סדר, אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

דוגמאות קלאסיות – היחס "קטן-שווה", יחס ההכלה, היחס "מחלק את".

כל יחס סדר R אפשר לתאר ויזואלית באמצעות דיאגרמת הסה – אם $(a,b) \in R$ אנחנו ממקמים את a מתחת ל-b ומותחים ביניהם קו; אם $(a,b),(b,c) \in R$ ולכן גם $(a,c) \in R$, אין צורך למתוח קו "ישיר" מ-a ל-c.

יחס סדר R על קבוצה A נקרא מלא, אם כל שני איברים מתייחסים זה לזה, כלומר:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

R מלא אם ורק אם דיאגרמת הסה שלו היא עמודה אחת.

<u>איברים מינימליים ומקסימליים:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר על A.

1. איבר $a \in A$ נקרא **מינימלי**, אם: $\forall b \in A : (b,a) \in R \rightarrow a = b$.

באופן שקול: $\forall b \in A : a \neq b \to (b,a) \notin R$. בדיאגרמה – a הוא מינימלי אם אין אף אחד מתחתיו.

2. איבר $a \in A$ נקרא **קטן ביותר** או **מינימום**, אם: $\forall b \in A : (a,b) \in R$.
בדיאגרמה – a הוא קטן ביותר אם כל השאר נמצאים מעליו.

3. איבר $a \in A$ נקרא **מקסימלי**, אם: $\forall b \in A : (a,b) \in R \to a = b$.
באופן שקול: $\forall b \in A : a \neq b \to (a,b) \notin R$. בדיאגרמה – a הוא מקסימלי אם אין אף אחד מעליו.

4. איבר $a \in A$ נקרא **גדול ביותר** או **מקסימום**, אם: $\forall b \in A : (b,a) \in R$.
בדיאגרמה – a הוא גדול ביותר אם כל השאר נמצאים מתחתיו.

למשל – בקבוצה $\{1,2,3,4,5\}$ עם היחס "קטן-שווה", האיבר 1 הוא מינימלי; הוא גם קטן ביותר. 5 הוא מקסימלי; הוא גם גדול ביותר.
כמו כן, בקבוצה $\{2,3,4,6,8,12,16,24\}$ עם היחס "מחלק את", $2,3$ מינימליים, אין קטן ביותר; $16,24$ מקסימליים, אין גדול ביותר. אם מוסיפים את 7 לקבוצה, אז הוא גם מינימלי וגם מקסימלי.

<u>מגוון שאלות:</u>

1. כפי שראינו בדוגמאות, איבר מינימלי לא חייב להיות קטן ביותר. האם ההיפך נכון? התשובה היא כן – כל איבר קטן ביותר הוא מינימלי. נסביר פורמלית. נניח ש-$a \in A$ קטן ביותר. כלומר, לכל $b \in A$: $(a,b) \in R$. אם גם $(b,a) \in R$, מכיוון ש-R הוא אנטי-סימטרי, נקבל שבהכרח: $a = b$.
כלומר: $\forall b \in A : (b,a) \in R \to a = b$, וזו בדיוק ההגדרה של מינימלי.
באופן דומה, איבר גדול ביותר הוא גם מקסימלי.

2. כפי שראינו בדוגמאות, יכולים להיות כמה מינימליים (יותר מ-1) וכמה מקסימליים. מה לגבי קטן ביותר/גדול ביותר? במילים אחרות, נניח שקיים איבר $a \in A$ קטן ביותר. האם הוא יחיד? התשובה היא כן - אם יש איבר קטן ביותר, אז הוא יחיד. נסביר פורמלית. אם $a \in A$ קטן ביותר, אז לכל $b \in A$: $(a,b) \in R$. נניח בשלילה שיש עוד איבר קטן ביותר, שנסמן c: $c \neq a$.

מצד אחד, מכיוון ש-a קטן ביותר, $(a,c) \in R$. מצד שני, מכיוון ש-c קטן ביותר, $(c,a) \in R$. R אנטי-סימטרי, ולכן $a = c$ וסתירה.

באופן דומה, איבר גדול ביותר הוא יחיד.

אפשר לסכם את $1,2$ ולומר - איבר קטן ביותר הוא מינימלי יחיד, איבר גדול ביותר הוא מקסימלי יחיד.

3. כפי שראינו בדוגמאות, לא חייבים להיות איברים קטנים ביותר/גדולים ביותר. האם חייבים להיות איברים מקסימליים/מינימליים? התשובה היא לא.

למשל, בקבוצה $(\mathbb{N}, \leq)$ אין איברים מקסימליים - לכל $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \in \mathbb{N}$ מקיים: $n \leq n+1$. יש איבר מינימלי, ואפילו קטן ביותר - 1.

בקבוצה $((-\infty,0], \leq)$ אין איברים מינימליים - לכל $x \in (-\infty,0]$, $x-1 \in (-\infty,0]$ מקיים: $x-1 \leq x$. יש איבר מקסימלי, ואפילו גדול ביותר - 0.

בקבוצה $(\mathbb{Z}, \leq)$ אין איברים מינימליים ואין איברים מקסימליים.

<u>הערה:</u> אם הקבוצה A סופית, בהכרח יש בה איבר מקסימלי ואיבר מינימלי. בקבוצה אינסופית אי-אפשר לדעת מראש, למשל בקבוצה $([1,2], \leq)$ יש איבר מקסימלי ואיבר מינימלי.

4. אמרנו שאיבר קטן ביותר הוא מינימלי יחיד. האם ההיפך נכון? כלומר, אם איבר הוא מינימלי יחיד, האם הוא קטן ביותר? כאשר הקבוצה סופית, התשובה היא כן. באופן כללי, התשובה היא לא. נתבונן, למשל, בדוגמה הבאה. על הקבוצה $\mathbb{Z} \cup \{elad\}$ נגדיר את היחס הבא:

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \leq y\} \cup \{(elad, elad)\}$$

זהו יחס סדר – רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

האיבר $elad$ הוא מינימלי (אין אף אחד מתחתיו) – לא קיים $b \neq elad$ כך ש: $(b, elad) \in R$. הוא גם יחיד – לכל $b \neq elad$, $b \in \mathbb{Z}$ ואז: $(b-1, b) \in R$, כלומר b לא מינימלי.

מצד שני, $elad$ לא קטן ביותר, למשל $(elad, 1) \notin R$ (לא כל האיברים מעליו).

אותה הדוגמה מראה שאיבר מקסימלי יחיד הוא לא בהכרח גדול ביותר.

כלומר – אם אף אחד לא נמצא מתחתיך ואתה היחיד שעושה זאת – זה עדיין לא אומר שכולם מעליך...

5. כפי שראינו בדוגמאות, איבר יכול להיות גם מינימלי וגם מקסימלי. האם איבר יכול להיות גם קטן ביותר וגם גדול ביותר? הדבר אפשרי אם ורק אם יש בקבוצה A איבר אחד בלבד.

מצד שני, אפשר להעיר שיכולים להיות אינסוף איברים שהם גם מינימליים וגם מקסימליים, אפילו כל האיברים בקבוצה...למשל, אם נסמן ב-P את קבוצת הראשוניים, עם היחס "מחלק את" כל איברי הקבוצה גם מינימליים

וגם מקסימליים.

6. האם התשובות שלנו לחלק מהשאלות משתנות כאשר היחס R הוא מלא?

כאשר היחס מלא, לא חייבים להיות מינימליים/מקסימליים, למשל $(\mathbb{Z},\leq)$.

מצד שני, אם היחס מלא:

א. אם יש איבר מינימלי, אז הוא יחיד והוא קטן ביותר. כנ"ל, אם יש איבר מקסימלי אז הוא יחיד וגדול ביותר.

במילים אחרות, איבר הוא מינימלי אם ורק אם הוא קטן ביותר.

ב. אם הקבוצה סופית, בהכרח יש איבר גדול ביותר ואיבר קטן ביותר.

<u>חסמים:</u>

תהיינה A קבוצה ו-$B\subseteq A$, ויהי R יחס סדר על A. שאלה מתבקשת – האם יש איבר ב-A שגדול יותר מכל איברי B? האם האיבר הזה נמצא ב-B? כנ"ל לגבי קטן.

אם כן, איבר $M\in A$ נקרא **חסם מלמעלה** של B, אם (הוא גדול יותר מכל איברי B): $\forall b\in B:(b,M)\in R$.

למשל, נסתכל על $(\mathbb{N},\leq)$ ועל $B=\{1,2,3,4,5\}$. $2021\in\mathbb{N}$, ולכל $b\in B$ מתקיים: $b\leq 2021$. לכן, 2021 חסם מלמעלה של B. כך גם $5,45,928345682629587$ למשל.

דוגמה נוספת – נסתכל על $(\mathbb{N},|)$ ועל $B=\{1,2,3,4,5\}$. $120\in\mathbb{N}$, למשל, מקיים: $\forall b\in B:b|120$ ולכן 120 חסם מלמעלה של B.

הערה: אם לקבוצה B יש חסם מלמעלה, נאמר ש-B **חסומה מלמעלה**. חסם מלמעלה נקרא **חסם מלעיל**.

באופן דומה, איבר $m \in A$ נקרא חסם מלמטה של B אם (הוא קטן יותר מכל איברי B): $\forall b \in B : (m, b) \in R$.

למשל, נסתכל על $(\mathbb{R}, \leq)$ ועל $B = [1, 2]$. -2, למשל, הוא חסם מלמטה – לכל $b \in [1, 2]$ מתקיים: $-2 \leq b$. גם $0, -\frac{1}{2}, 1$ הם חסמים מלמטה.

דוגמה נוספת – נסתכל על $(\mathbb{N}, |)$ ועל $B = \{20, 4800, 140\}$. חסם מלמטה של B הוא מספר שמחלק את כל איברי B, למשל $2, 20, 5, 4, 10$.

הערה: אם לקבוצה B יש חסם מלמטה, נאמר ש-B **חסומה מלמטה**. חסם מלמטה נקרא **חסם מלרע**.

קבוצה שהיא חסומה מלמעלה ומלמטה נקראת בפשטות חסומה.

קבוצת הזוגיים ב-$(\mathbb{N}, \leq)$ חסומה מלמטה ($1, 2$ חסמים מלמטה) אך לא מלמעלה.

הקבוצה $(-\infty, 0]$ ב-$(\mathbb{R}, \leq)$ חסומה מלמעלה אך לא מלמטה.

הקבוצה $\mathbb{Z}$ ב-$(\mathbb{R}, \leq)$ לא חסומה לא מלמטה ולא מלמעלה.

חסם עליון וחסם תחתון:

תהיינה A קבוצה ו-$B \subseteq A$, ויהי R יחס סדר על A.

אם B חסומה מלמעלה, את האיבר הקטן ביותר בקבוצת החסמים מלמעלה (אם קיים כזה) נסמן: $\sup B$; איבר כזה נקרא סופרימום – **חסם עליון**.

למשל, נסתכל על $(\mathbb{N}, \leq)$ ועל $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. קבוצת החסמים

מלמעלה של B היא: $\{5,6,\dots\}$, והאיבר הקטן ביותר בה הוא 5. לכן: $\sup B=5$.

דוגמה נוספת – נסתכל על $(\mathbb{N},|)$ ועל $B=\{1,2,3,4,5\}$. חסם מלמעלה של B הוא מספר שמתחלק בכל המספרים $1,2,3,4,5$. כלומר, קבוצת החסמים מלמעלה של B היא:

$$\{n\in\mathbb{N}:2|n\wedge 3|n\wedge 4|n\wedge 5|n\}=\{60,120,180,\dots\}=\{60k:k\in\mathbb{N}\}$$

60 הוא האיבר הקטן ביותר בקבוצת החסמים מלמעלה של B – הוא מחלק את כולם – ולכן: $\sup B=60$.

אם B לא חסומה מלמעלה, ברור שאין לה חסם עליון, לא הכי מעניין. דוגמה מעניינת תהיה קבוצה B שחסומה מלמעלה אבל אין לה חסם עליון.

למשל, בקבוצה $(\mathbb{Q},\leq)$ נתבונן בקבוצה: $B=\{x\in\mathbb{Q}:x^2\leq 2\}$.

ראשית, זו קבוצה חסומה מלמעלה. למשל, 20 חסם מלמעלה של הקבוצה – אם $x\in B$, אז $x\leq\sqrt{2}$ ובוודאי ש: $x\leq 20$.

שנית, נשים לב שאם היינו מסתכלים ב-$(\mathbb{R},\leq)$, $\sqrt{2}$ היה החסם העליון של $B=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. $\sqrt{2}$ איננו איבר ב-$\mathbb{Q}$, ולכן הוא לא יכול להיות החסם העליון במקרה שלנו.

נראה שאין חסם עליון – אין איבר קטן ביותר בקבוצת החסמים מלמעלה של B. במילים אחרות, לכל $M\in\mathbb{Q}$ שמקיים $x\leq M$ לכל $x\in B$, נסביר למה קיים M_1 המקיים: $M_1<M$ $x\leq$ לכל $x\in B$.

אם כן, $\sqrt{2}=1.4142\dots$. אם M חסם מלמעלה של B, אז: $\sqrt{2}<M$.

לכן, יש ספרה בפיתוח העשרוני של M שגדולה יותר מהספרה באותו המקום

בפיתוח העשרוני של $\sqrt{2}$.

כעת, באופן כללי – לאו דווקא ל-$\sqrt{2}, M$ – בין שני מספרים ממשיים שונים, תמיד "מתחבא" מספר רציונלי – מסתכלים על הספרה שבה המספרים שונים זה מזה, והמספר הרציונלי שנמצא בין שניהם הוא הפיתוח העשרוני עד לספרה הזו (הגדולה מבין שני המספרים).

למשל, נתבונן בשני המספרים: $1.4677853103\ldots, 1.46778234\ldots$. בספרה השישית אחרי הנקודה המספרים שונים זה מזה. מספר רציונלי שנמצא בין שניהם הוא: $1.4677853103\ldots > 1.467785 > 1.46778234\cdots$. זה אכן מספר רציונלי: $\frac{1467785}{1000000} = 1.467785$.

אם נחזור לדוגמה – בין M ובין $\sqrt{2}$ יש מספר רציונלי M_1: $\sqrt{2} < M_1 < M$.

<u>הערה:</u>

1. שוב, נדגיש – בין כל שני ממשיים "מתחבא" רציונלי.
2. בניגוד ל-$\mathbb{Q}$, ב-$(\mathbb{R}, \leq)$ לכל קבוצה חסומה מלמעלה יש חסם עליון.
3. ראינו שב-$(\mathbb{N}, |)$, 60 הוא החסם העליון של $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, כי הוא המספר הקטן ביותר שמתחלק בכולם.

באופן כללי, המספר הקטן ביותר שמתחלק בכל המספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ נקרא הכפולה המשותפת המינימלית של $a_1, \ldots, a_n$, ומסומן: $lcm\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$.
כלומר: $lcm\left(1, 2, 3, 4, 5\right) = 60$.

באופן דומה, אם B חסומה מלמטה, את האיבר הגדול ביותר בקבוצת החסמים מלמטה (אם קיים כזה) נסמן: $\inf B$; איבר כזה נקרא אינפימום – **חסם תחתון**.

למשל, נסתכל על $(\mathbb{R}, \leq)$ ועל $B = [1, 2]$. קבוצת החסמים מלמטה היא:

$(-\infty,1]$. האיבר הגדול ביותר בקבוצה הזו הוא 1, ולכן 1 הוא החסם התחתון של B: $\inf B=1$.

דוגמה נוספת – נסתכל על $(\mathbb{N},|)$ ועל $B=\{20,4800,140\}$. קבוצת החסמים מלמטה היא: $\{1,20,5,4,10,2\}$. האיבר הגדול ביותר בקבוצה הזו הוא 20, ולכן: $\inf B=20$.

באופן דומה למה שראינו על חסם עליון, אפשר להראות שלקבוצה $B=\{x\in\mathbb{Q}:x^2\leq 2\}$ ב-$(\mathbb{Q},\leq)$ אין חסם תחתון למרות שהיא כן חסומה מלמטה.

<u>הערות:</u>

1. ב-$(\mathbb{R},\leq)$, אם קבוצה חסומה מלמטה אז יש לה חסם תחתון.
2. אמרנו ש-20 הוא החסם התחתון של $\{20,4800,140\}$ ב-$(\mathbb{N},|)$ מכיוון שהוא המספר הגדול ביותר שמתחלק בכולם. באופן כללי, המספר הכי גדול שמחלק את כל המספרים $a_1,a_2,\dots,a_n$ נקרא המחלק המשותף המקסימלי, ומסומן: $\gcd(a_1,\dots,a_n)$.

בשורה התחתונה, ב-$(\mathbb{N},|)$:

$$\sup\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=lcm\,(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

$$\inf\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=\gcd(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

יש קשר בין איבר קטן/גדול ביותר בקבוצה B לבין החסם העליון/תחתון של B:

א. אם ב-B יש איבר גדול ביותר, אז הוא החסם העליון.

ב. אם ב-B יש איבר קטן ביותר, אז הוא החסם התחתון.

חשוב להעיר שאם בקבוצה אין איבר גדול ביותר (או קטן ביותר), זה לא אומר שאין לה חסם עליון (או תחתון), למשל: $B=(1,2)$ ב-$(\mathbb{R},\leq)$. החסם העליון הוא 2, כי קבוצת החסמים מלמעלה היא $[2,\infty)$ והוא הקטן ביותר שם, אבל 2 לא שייך ל-B.

נוכיח את א'.

נסמן ב-M את האיבר הגדול ביותר ב-B, ונראה שהוא חסם עליון. כדי להראות ש-M חסם עליון, צריך להראות שני דברים:

1. M חסם מלמעלה – לפי ההגדרה של איבר גדול ביותר, $\forall b\in B:\ (b,M)\in R$, ולכן M חסם מלמעלה.
2. M קטן יותר מכל חסם מלמעלה – מכיוון ש-$M\in B$ מצד אחד, ומצד שני כל חסם מלמעלה M_1 מקיים: $\forall b\in B:(b,M_1)\in R$, אם נבחר $b=M$ נקבל ש: $(M,M_1)\in R$.

<u>הערה:</u>

מה לגבי יחס ההכלה? נניח ש-X קבוצה ו-$A=P(X)$. עבור $B\subseteq A$ קבוצה של קבוצות שמוכלות ב-X, מהם החסמים העליון והתחתון?

$\sup B$ הוא הקבוצה הקטנה ביותר שמכילה את כל הקבוצות של B – זהו האיחוד של הקבוצות שב-B: $\sup B=\cup B$.

באופן דומה $\inf B$ הוא הקבוצה הגדולה ביותר שמוכלת בכל הקבוצות של B – זהו החיתוך של הקבוצות ב-B: $\inf B=\cap B$.