החבורה הסימטרית

טענה

החבורה A_5 פשוטה.

הוכחה

נתבונן על החבורות A_5, S_5.

נבנה טבלה:

מבנה מחזורים	סימן	מספר התמורות
$(*)(*)(*)(*)(*)$	$+$	1
$(**)(*)(*)(*)$	$-$	10
$(***)(*)(*)$	$+$	20
$(****)(*)$	$-$	30
$(*****)$	$+$	24
$(**)(**)(*)$	$+$	15
$(***)(**)$	$-$	20

יהי $x \in A_5 \subseteq A_5$.

מתקיים:

$$[x]_{A_n} \quad \subseteq \quad [x]_{S_n}$$

נבדוק עבור אילו ערכי x כנ"ל:

$$[x]_{A_n} \quad \subsetneq \quad [x]_{S_n}$$

$A_n, C_{S_n}(x) \leq S_n$ ו- $A_n \trianglelefteq S_n$, לכן עפ"י משפט האיזומורפיזם השני:

$$A_n / C_{A_n}(x) \cong A_n \cdot C_{S_n}(x) / C_{S_n}(x)$$

לכן:

$$\left| A_n / C_{A_n}(x) \right| = \left| A_n \cdot C_{S_n}(x) / C_{S_n}(x) \right|$$

לכן:

$$\left[\mathrm{A}_n : \mathrm{C}_{\mathrm{A}_n}(x)\right] = \left[\mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) : \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right]$$

עפ"י משפט:

$$\left|[x]_{\mathrm{A}_n}\right| = \left[\mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) : \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right]$$

עפ"י כפליות האינדקס:

$$\left[\mathrm{S}_n : \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right] = \left[\mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) : \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right] \cdot \left[\mathrm{S}_n : \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right]$$

עפ"י משפט:

$$\left|[x]_{\mathrm{S}_n}\right| = \left[\mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) : \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right] \cdot \left[\mathrm{S}_n : \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right]$$

לכן:

$$\left|[x]_{\mathrm{S}_n}\right| = \left|[x]_{\mathrm{A}_n}\right| \cdot \left[\mathrm{S}_n : \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right]$$

לכן:

$$\left|[x]_{\mathrm{A}_n}\right| \mid \left|[x]_{\mathrm{S}_n}\right|$$

לכן:

$$\begin{aligned}
[x]_{\mathrm{A}_n} = [x]_{\mathrm{S}_n} &\Leftrightarrow \left|[x]_{\mathrm{A}_n}\right| = \left|[x]_{\mathrm{S}_n}\right| \\
&\Leftrightarrow \left[\mathrm{S}_n : \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right] = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{S}_n = \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) \\
&\Leftrightarrow \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) \nsubseteq \mathrm{A}_n
\end{aligned}$$

לכן, מחלקת הצמידות של x ב - S_n מתפצלת ב - A_n אם ורק אם $\mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) \subseteq \mathrm{A}_n$, ונשארת מחלקה אחת אם ורק אם $\mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x) \nsubseteq \mathrm{A}_n$.

נוכיח כי אם מחלקת הצמידות של x ב - S_n מתפצלת ב - A_n, היא מתפצלת לשתי מחלקות.

מתקיים:

$$\left[\mathrm{S}_n : \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right] \in \{1,2\}$$

אם מחלקת הצמידות של x ב - S_n מתפצלת ב - A_n:

$$\left[\mathrm{S}_n : \mathrm{A}_n \cdot \mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(x)\right] = 2$$

נניח בשלילה כי $[x]_{S_n}/[x]_{A_n}$ היא איחוד של יותר ממחלקת צמידות אחת ב - A_n.

יהי $y \in [x]_{S_n}/[x]_{A_n}$.

עפ"י ההנחה:

$$\left|[y]_{A_n}\right| \quad < \quad \left|[x]_{A_n}\right|$$

מתקיים:

$$\left|[y]_{S_n}\right| \quad = \quad \left|[y]_{A_n}\right| \cdot \left[S_n : A_n \cdot C_{S_n}(y)\right]$$

לכן:

$$\left|[x]_{S_n}\right| \quad = \quad \left|[y]_{A_n}\right| \cdot \left[S_n : A_n \cdot C_{S_n}(y)\right]$$

לכן:

$$2 \cdot \left|[x]_{A_n}\right| \quad = \quad \left|[y]_{A_n}\right| \cdot \left[S_n : A_n \cdot C_{S_n}(y)\right]$$

לכן:

$$\left|[x]_{A_n}\right| \quad \le \quad \left|[y]_{A_n}\right|$$

סתירה.

לכן, $[x]_{S_n}/[x]_{A_n}$ היא מחלקת צמידות אחת.

לכן, אם מחלקת הצמידות של x ב - S_n מתפצלת ב - A_n, היא מתפצלת לשתי מחלקות.

נבנה טבלה:

מבנה מחזורים	סימן	מספר התמורות	סדר המרכז	המרכז	פיצול
$(*)(*)(*)(*)(*)$	$+$	1	120		לא
$(**)(*)(*)(*)$	$-$	10			
$(***)(*)(*)$	$+$	20	6	$\langle(1\ 2\ 3),(4\ 5)\rangle$	לא
$(****)(*)$	$-$	30			
$(*****)$	$+$	24	5	$\langle(1\ 2\ 3\ 4\ 5)\rangle$	כן
$(**)(**)(*)$	$+$	15	8		לא
$(***)(**)$	$-$	20			

לכן, הפירוק של A_5 למחלקות צמידות הוא:

$$60 \quad = \quad 1+20+15+12+12$$

לא קיים תת-סכום של הנ״ל הכולל את 1 ומחלק את 60, לכן, A_5 פשוטה.

■

הערה

S_n נוצרת על-ידי החילופים $(**)$.

מסקנה

A_n נוצרת על-ידי האיברים מהצורה $(i\ j)(k\ \ell)$, כאשר $i \neq j, k \neq \ell$.

זו קבוצת המחזורים מהצורה: $(**)(**), (***)$.

תרגיל

A_n נוצרת על-ידי המחזורים $(***)$.

פתרון

מתקיים:

$$(1\ 3)(2\ 4) \quad = \quad (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)$$

■

תרגיל

לכל $5 \leq n \in \mathbb{N}$, A_n נוצרת על-ידי המחזורים $(**)(**)$.

משפט

לכל $5 \leq n$, החבורה A_n פשוטה.

הוכחה

יהי $1 \neq \sigma \in N \lhd \mathrm{A}_n$.

נוכיח כי קיים $1 \neq \sigma' \in N$ וקיים $1 \leq k \leq n$, כך ש:

$$\sigma'(k) \quad = \quad k$$

יהי $i \neq \sigma(i) = j$.

יהי $\ell \neq i, j, \sigma(j)$.

תהי $\mathcal{X} \coloneqq \{i, j, \ell, \sigma(j), \sigma(\ell)\}$.

יהי $\tau \coloneqq (i\ j\ \ell)$.

מתקיים:

$$\begin{aligned} \sigma \circ \tau(i) &= \sigma(j) \\ \tau \circ \sigma(i) &= \tau(j) = \ell \end{aligned}$$

לכן, σ, τ אינם מתחלפים.

מתקיים:

$$\begin{aligned} [\sigma, \tau] &= \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \circ \tau^{-1} \\ &= (i\ \ell\ \sigma(j)\ \sigma(\ell)\ j) \end{aligned}$$

לכן:

$$[\sigma, \tau] \in \mathrm{A}_X$$

$N \lhd \mathrm{A}_n$, לכן:

$$[\sigma, \tau] \in N$$

לכן:

$$1 \neq \omega = [\sigma, \tau] \in N \cap A_X$$

$N \lhd \mathrm{A}_n$, לכן:

$$N \cap \mathrm{A}_X \lhd \mathrm{A}_X$$

A_X פשוטה, לכן:

$$N \cap \mathrm{A}_X = \mathrm{A}_X$$

לכן:

$$\mathrm{A}_X \subseteq N$$

לכן, N כוללת מחזורים באורך 3.

$\mathrm{A}_n \rhd N$ ומבנה המחזורים $(***)$ ב - A_n הוא מחלקת צמידות, לכן N כוללת את כל המחזורים באורך 3.

לכן:

$$N = \mathrm{A}_n$$

לכן, A_n פשוטה.

$$\blacksquare$$

הערה

A_4 אינה פשוטה.

מתקיים:

$$\mathrm{K}_4 = \langle (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4) \rangle \lhd \mathrm{A}_4$$

מתקיים:

$$\mathrm{K}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

$$\mathrm{S}_4/K_4 \cong \mathrm{S}_3$$

הלמה של ברנסייד

בעיה

מציבים בחנוכייה עגולה נרות בשלושה צבעים.

רוצים לספור חנוכיות שונות עד כדי סיבוב.

נגדיר:

$X =$ מרחב החנוכיות.

$G = \mathbb{Z}_8$ פועלת על X על-ידי סיבוב.

נחשב את עוצמת קבוצת המסלולים:

$$\left|{}^{X}\!/_{G}\right|$$

הגדרה

תהי G חבורה הפועלת על מרחב X.

לכל $g \in G$, נגדיר:

$$\mathrm{fp}(g) \quad \coloneqq \quad |\{x \in X \mid gx = x\}|$$

למה (הלמה של ברנסייד)

תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X.

אזי, מתקיים:

$$\left|{}^{X}\!/_{G}\right| \quad = \quad \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \mathrm{fp}(g)$$

הוכחה

נסמן:

$$F \quad \coloneqq \quad \{(g, x) \mid g \in G, x \in X, gx = x\}$$

מצד אחד:

$$|F| \quad = \quad \sum_{g \in G} \sum_{x \in X} \delta_{x,gx}$$

$$= \sum_{g\in G} \mathrm{fp}(g)$$

מצד שני:

$$\begin{aligned} |F| &= \sum_{x\in X}\sum_{g\in G} \delta_{x,gx} \\ &= \sum_{x\in X} |G_x| \\ &= \sum_{x\in X} \frac{|G|}{|[x]|} \\ &= \sum_{C\subseteq X}\sum_{x\in C} \frac{|G|}{|C|} \\ &= \sum_{C\subseteq X} |G| \\ &= |G|\cdot \left|{}^{X}/_{G}\right| \end{aligned}$$

לכן:

$$\left|{}^{X}/_{G}\right| = \frac{1}{|G|}\cdot\sum_{g\in G}\mathrm{fp}(g)$$

פתרון

תהי $\mathbb{Z}_8 = \langle\sigma\rangle$.

מתקיים:

$$\begin{aligned} \mathrm{fp}(1) &= 3^8 \\ \mathrm{fp}(\sigma) &= 3^1 \\ \mathrm{fp}(\sigma^2) &= 3^2 \\ \mathrm{fp}(\sigma^3) &= 3^1 \\ \mathrm{fp}(\sigma^4) &= 3^4 \\ \mathrm{fp}(\sigma^5) &= 3^1 \\ \mathrm{fp}(\sigma^6) &= 3^2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{fp}(\sigma^7) = 3^1$$

עפ"י הלמה של ברנסייד:

$$\begin{aligned}\left|{}^{X}\!/_{G}\right| &= \frac{1}{8}\cdot(3^8+4\cdot 3+2\cdot 3^2+3^4) \\ &= 834\end{aligned}$$

■