תרגילים לתרגול נוסף

3 במרץ 2016

1. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה. הראו ש:

$$\nabla f\left(x_0,y_0\right)=0$$

תנאי הכרחי לכך שהנקודה $\left(x_0,y_0\right)$ היא נקודת קיצון של f.

<u>פתרון:</u>

אם $\left(x_0,y_0\right)$ נקודת קיצון של $f\left(x,y\right)$, היא גם נקודת קיצון של:

$$f\left(x,y_0\right),f\left(x_0,y\right)$$

אלו פונקציות של משתנה אחד, ואנו יודעים שעבור $f\left(x,y_0\right)$,

$$0=\frac{df\left(x,y_0\right)}{dx}\left(x_0\right)=f_x\left(x_0,y_0\right)$$

תנאי הכרחי לקיצון בנקודה $\left(x_0,y_0\right)$.

באופן דומה, גם $f_y\left(x_0,y\right)=0$, כנדרש.

2. תהי $F\left(x,y,z\right)$ פונקציה תחת האילוץ $G\left(x,y,z\right)=0$.

נניח ש-F,G גזירות ברציפות וגם $G_z,F_z\neq 0$.

הוכיחו שתנאי הכרחי לכך של-F יש קיצון תחת האילוץ G הוא שיתקיים:

$$F_xG_y-F_yG_x=0$$

<u>פתרון:</u>

מכיוון שהפונקציה G גזירה ברציפות, $G=0$ וגם $G_z\neq 0$, לפי משפט הפונקציה הסתומה אפשר לבודד את z כפונקציה של x,y:

$$z=z\left(x,y\right)$$

ונוכל לרשום:

$$F\left(x,y,z\left(x,y\right)\right),G\left(x,y,z\left(x,y\right)\right)$$

כעת תנאי הכרחי לקיצון הוא $\nabla F=0$, כלומר:

$$F_x+F_zz_x=F_y+F_zz_y=0$$

לפי כלל השרשרת.

מצד שני, מכיוון ש–$G\left(x,y,z\right)=0$ אפשר לגזור ולהשוות ל–0:

$$G_x+G_zz_x=G_y+G_zz_y=0$$

שוב, לפי כלל השרשרת.

מהנגזרות לפי x אפשר לקבל: $F_xG_z-F_zG_x=0$ (אם מבודדים את z_x בכל משוואה).

מהנגזרות לפי y אפשר לקבל: $F_yG_z-F_zG_y=0$.

מכאן, נקבל:

$$\frac{F_z}{G_z}=\frac{F_x}{G_x}=\frac{F_y}{G_y}$$

ולכן: $F_xG_y-F_yG_x=0$.

שימו לב שלפי משפט הפונקציה הסתומה, $z_x=-\frac{G_x}{G_z}$.

3. תנו דוגמה לפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המקיימת:

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 f\left(x,y\right)dx\right)dy\neq\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 f\left(x,y\right)dy\right)dx$$

<u>פתרון:</u>

נתבונן בפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\frac{x-y}{\left(x+y\right)^3}$$

נחשב את האינטגרל הימני:

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{x-y}{\left(x+y\right)^3}dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1\frac{2x-\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)^3}dy\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1\left(\frac{2x}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dy\right)dx=\int_0^1\left(-\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right)_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{-x}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_0^1\frac{-x(x+1)+(x+1)^2}{(x+1)^2}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)|_{x=0}^{x=1}=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

נחשב את האינטגרל השמאלי:

$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right)dy=-\int_0^1\left(\int_0^1\frac{y-x}{(x+y)^3}dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^1\frac{2y-(x+y)}{(x+y)^3}dx\right)dy=$$

$$=-\int_0^1\left(\int_0^1\left(\frac{2y}{(x+y)^3}-\frac{1}{(x+y)^2}\right)dx\right)dy=-\int_0^1\left(-\frac{x}{(x+y)^2}+\frac{1}{x+y}\right)_{x=0}^{x=1}dy=$$

$$=-\int_0^1\left(\frac{-y}{(y+1)^2}+\frac{1}{y+1}+\frac{y}{y^2}-\frac{1}{y}\right)dy=-\int_0^1\frac{-y(y+1)+(y+1)^2}{(y+1)^2}dy=$$

$$=-\int_0^1\frac{1}{y+1}dy=-\ln(y+1)|_{y=0}^{y=1}=-\ln 2+\ln 1=-\ln 2$$

והאינטגרלים אכן לא שווים.

תנאי מספיק לכך שנוכל להחליף את סדר האינטגרציה הוא שהאינטגרל הכפול קיים.

במקרה שלנו:

$$\iint_D\frac{x-y}{(x+y)^3}dxdy$$

לא קיים מכיוון שהפונקציה אינה רציפה בתחום $D=[0,1]^2$.