חשבון אינפיניטסמלי ואנטגרלי (0321-1833-01)

מבחן, מועד א, סמ׳ א, תשס״ה, 25/1/05

פרופ׳ י.אהרונסון

זמן המבחן: שלש שעות.

ענה על שאלה מס׳ 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא שימוש בחומר עזר. הוכח את תשובותיך. סמן את מספרי השאלות עליהן ענית על מחברת מס׳ I.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) (5 נק׳) אם $I \subset \mathbb{R}$ קטע ו-$f,\ g : I \to \mathbb{R}$ פונקציות עולות, אזי $fg : I \to \mathbb{R}$ הינה פונקציה לא יורדת.

ב) (5 נק׳) $(1+\frac{1}{n^2})^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

ג) (5 נק׳) $\frac{d^2}{dx^2}\cos(2\arccos x)$ הינה קבוע עבור $|x| \le 1$.

ד) (5 נק׳) אם $f : (a,b) \to \mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ רציפה במ״ש ב-(a,b), אזי גם $\frac{1}{f}$ רציפה במ״ש ב-(a,b).

2. (20 נק׳)

א) מצא פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) \underset{n\to\infty}{\to} \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$ עבור $x \in \mathbb{R}$.

ב) הוכח כי אם $b_n > 0$ עבור $n \in \mathbb{N}$ ו- $r > 1 \underset{n\to\infty}{\to} b_n$, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n} < \infty$.

3. (20 נק׳)

א) הוכח כי אם $0 < x < 1$, אזי $x < x\sqrt{2-x} < 1$.

עבור $x \in \mathbb{R}_+$, נגדיר את הסידרה $a_1(x), a_2(x), \dots$ ע״י $a_1(x) = x$ ו- $a_{n+1}(x) := a_n(x)\sqrt{2-a_n(x)}$.

ב) יהיה $x \in (0,1)$. הוכח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ והשב אותו.

ג) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{5}{3}) \in \mathbb{R}$?

4. (20 נק׳)

נניח כי $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ הינה רציפה וכי $f(0) = f(2)$.

א) הוכח כי קיימים $x, y \in [0,1]$ כך ש-$f(x) \le f(x+1)$ ו-$f(y) \ge f(y+1)$.

ב) הוכח כי קיים $z \in [0,1]$ כך ש-$f(z) = f(z+1)$.

5. (20 נק׳)

א) האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} (\frac{1}{3})^n$ מתכנס?

ב) האם האנטגרל $\int_0^{\infty} e^{-x^4}dx$ מתכנס?

6. (20 נק׳)

נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע״י

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x > 0, \\ 4 - 3\cos x & x < 0. \end{cases}$$

מצא את $f(0)$ כך ש-f תהיה רציפה ב-0 והוכח כי הפונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המתקבלת הינה C^1 על $\mathbb{R}$. האם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הינה C^2 על $\mathbb{R}$?

בהצלחה!!!

נוסחאות

(א) נגזרות:

$y = uv \;:\; y' = u'v + uv'$; $\quad y = \cos x \;:\; y' = -\sin x$;

$y = \frac{u}{v} \;:\; y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$: $\quad y = \tan x \;:\; y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

$y = x^\alpha \;:\; y' = \alpha x^{\alpha-1}$; $\quad y = \cot x \;:\; y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

$y = \ln x \;:\; y' = \frac{1}{x}$; $\quad y = \arcsin x \;:\; y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y = \sin x \;:\; y' = \cos x$; $\quad y = \arctan x \;:\; y' = \frac{1}{1+x^2}$;

$y = e^x \;:\; y' = e^x$; $\quad y = a^x \;:\; y' = a^x \ln a \; (a > 0)$;

(ב) אנטגרלים:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C (n \neq -1); \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C; \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C; \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C; \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int u dv = uv - \int v du + C; \quad \int \tan x dx = -ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \cot x dx = ln|\sin x| + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

14

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

תאריך הבחינה 25-1-05

שם הקורס אופ' (מתקדם לפיסיקאים)

שם המורה י. אהרונסון

החוג/המגמה פיסיקה / חשמל

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

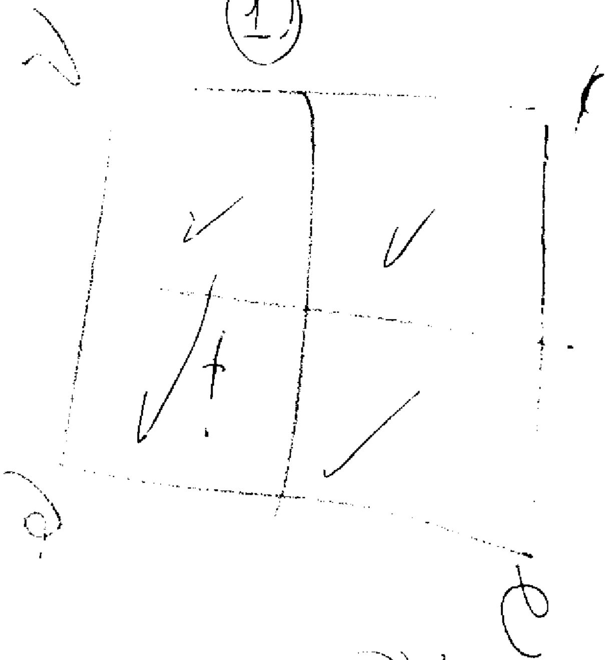
בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	

72834

1



100

5 $\boxed{20}$

2 $\boxed{20}$

3 15

6 20

המבחן

עניתי על השאלות: $\boxed{1,2,3,5,6}$

שאלה 1

(1)

(א) נוכיח שהטענה לא נכונה ע"י דוגמא נגדית:

נבחר קטע $I=[1,2]\subseteq\mathbb{R}$, ונבחר פונקציות g,f: $f=x^2$, $g=-\frac{1}{x}$

פונקציות ~~עולות~~ "אם ורק אם" הנגזרת שלהם חיובי בקטע, ונראה כי f,g פונקציות עולות בקטע I:

$f'(x)=2x>0$ ⟵ $x\in[1,2]$, $x>0$

$g'(x)=-\frac{(-1)}{x^2}=\frac{1}{x^2}>0$ ⟵ $x\in[1,2]$, $x>0$

לכן f,g פונקציות עולות, $I\subseteq\mathbb{R}$, וגם $f\cdot g: I\to\mathbb{R}$.

אבל נראה כי: $f\cdot g=x^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=-x$

ונראה כי $fg=-x$ היא פונקציה יורדת ב-I, כי הנגזרת של fg היא: $(fg)'=(-x)'=-1<0$

לכן fg פונקציה יורדת, ולא "לא יורדת", ולכן הטענה לא נכונה.

QED

(ב) נמצא את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=e^0=\boxed{1}$$

מאחר וזה נכון רק במידה ששני הגבולות קיימים וסופיים

לכן $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, והטענה ~~כן~~ נכונה.

(ג) נבדוק למה שווה $\frac{d^2}{dx^2}\cos(2\arccos x)$:

$\cos(2\arccos x)=\cos(\arccos x+\arccos x)=\cos^2(\arccos x)-\sin^2(\arccos x)$

זהות טריגונומטרית

$=\cos^2(\arccos x)-(1-\cos^2(\arccos x))=2\cos^2(\arccos x)-1\Rightarrow$

$(\cos^2(\arccos(x))=x^2)\Rightarrow$ (כי $x=\cos\arccos x$)

$=\boxed{2x^2-1}$

$\frac{d^2}{dx^2}(\cos(2\arccos x))=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(2x^2-1)\right)=\frac{d}{dx}(4x)=\underline{4}\rightarrow$ קבוע ~~לכן~~

QED

ולכן הנגזרת השנייה של $\cos(2\arccos x)$ הוא 4, קבוע, ולכן $\boxed{\text{הטענה נכונה.}}$

המשך של שאלה 1

ד. נוכיח שהטענה לא נכונה ע"י דוגמא נגדית:

נבחר $f=x$, בקטע $(a,b)=(0,2)$. $f=x$ רציפה במידה שווה ב-$(0,2)$. נוכיח זאת: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם מתקיים $|x-y|<\delta$ ($x,y\in(0,2)$) אז $|f_x-f_y|<\varepsilon$. בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $\boxed{\delta=\varepsilon}$, ואכן:

$$|f_x-f_y|=|x-y|<\delta=\underline{\varepsilon}$$ ← מכאן

לכן f רציפה ב-$(0,2)$. הפונקציה $g=\frac{1}{f}$, $g=\frac{1}{x}$ היא לא רציפה במ"ש. נוכיח זאת:

לפי קושי, פונק' לא רציפה במ"ש $\Leftrightarrow$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$, קיימים $x,y\in(0,2)$ שמקיימים $|x-y|<\delta$, אבל $|g_x-g_y|>\varepsilon$.

נגדיר את x,y כסדרות: $y_n=\frac{1}{n+1}$, $x_n=\frac{1}{n}$.

לכל $\delta>0$, נוכל למצוא n מספיק גדול שמקיים $\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|<\delta$, כי כאשר $n\to\infty$ אז $x_n-y_n=0$. לכל x,y מקיימים $|x-y|<\delta$ עבור כל δ, בהינתן n מספיק גדול. בנוסף $x,y\in(0,2)$, כי עבור כל n טבעי $0<x,y\le 1$. נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}$. אז:

$$|g_x-g_y|=\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{y_n}\right|=|n-(n+1)|=1>\frac{1}{2}=\underline{\underline{\varepsilon}}$$

לכן הוכחנו שלמרות ש-f רציפה במ"ש, הפונקציה $g=\frac{1}{f}$ היא לא רציפה במ"ש. QED

שאלה 2

(ג)

(א) נמצא פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$

נחלק למקרים:

i) $0<x$. אם $0<x$ אזי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{nx}}}{1+\frac{1}{e^{nx}}}=\frac{1-0}{1+0}=\boxed{1}$$

כי אם $0<x$, אזי: $e^{nx}\xrightarrow{n\to\infty} e^{\infty}=\infty$, ולכן $\frac{1}{e^{nx}}=\frac{1}{\infty}=0$

ii) $x=0$. אם $x=0$ אזי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=\lim\frac{e^{0}-1}{e^{0}+1}=\frac{1-1}{1+1}=\boxed{0}$$

כי $\underline{e^0=1}$

iii) $0>x$. אם $0>x$ אזי מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=\frac{0-1}{0+1}=\boxed{-1}$$

כי אם $0>x$ אזי: $e^{nx}\xrightarrow{n\to\infty} e^{-\infty}=0$.

לכן, נתאים את הפונקציה f למסקנה שמצאנו:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x>0\\ 0 & \text{if } x=0\\ -1 & \text{if } x<0\end{cases}}$$

ואזי מתקיים $\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ עבור כל $x\in\mathbb{R}$.

(ב) נתון: $\lim_{n\to\infty} b_n=r>1$. וכן $b_n>0$ לכל n טבעי. צ"ל ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_1\cdot b_2\cdots b_n}<\infty$

מ"מבחן המנה" אנו יודעים שאם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ ואם $l<1$ אזי הטור מתכנס. נבדוק האם הגבול הזה קיים עבור הטור שלנו, ב: $a_n=\frac{1}{b_1\cdot b_2\cdots b_n}$ ($b_n>0$ לכל n ולכן הטור חיובי):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{b_1\cdot b_2\cdots b_n\, b_{n+1}}}{\frac{1}{b_1\cdot b_2\cdots b_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{b_1\cdot b_2\cdots b_n}}{\cancel{b_1\cdot b_2\cdots b_n}\, b_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\boxed{\frac{1}{r}}$$

$b_{n+1}\xrightarrow{n\to\infty} r$

לכן $l=\frac{1}{r}$. מכיוון ש-$r>1$, אז מתקיים ש $l<1$ ($l=\frac{1}{r}<1\Leftrightarrow r>1$)

במצב ש $l<1$, אז לפי מבחן המנה הטור מתכנס. Q.E.D.

הערה לשאלה 2, ב: מכיוון ש- $a_n > 0$ לכל n טבעי אז ניתן להשתמש במבחן המנה. נכון זה הוא חשוב.

שאלה 3

(3)

(א) אם $0<x<1$, אז $x < x\sqrt{2-x} < 1$

נוכיח כל חלק בנפרד:

i) $x < x\sqrt{2-x}$

$x < x\sqrt{2-x} \;/ :x$ (ניתן לחלק ב-x כי $x>0$)

$1 < \sqrt{2-x} \Rightarrow 1 < 2-x \Rightarrow x < 1 \Rightarrow$ ~~נכון~~

הסבר: $\left(1 < (\sqrt{2-x})^2 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{2-x}\right)$

- לכן הוכחנו ש- $x < x\sqrt{2-x}$ עבור $0<x<1$

ii) $x\sqrt{2-x} < 1$

$1 < \sqrt{2-x}$ עבור כל $0<x<1$, ולכן $\sqrt{2-x} < (\sqrt{2-x})^2 = (2-x)$

$x\sqrt{2-x} < x(2-x) = 2x - x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 > 0$

$\Rightarrow (x-1)^2 > 0 \Rightarrow$ נכון, כי כל מספר בריבוע בשונה מ-0 הוא חיובי, ו- $x-1 \neq 0$ כי $0<x<1$.

- הוכחנו ש- $x(2-x) < 1$ עבור $0<x<1$, וזה נכון גם $x\sqrt{2-x} < 1$ (כי $\sqrt{2-x} < (2-x)$).

(ב) עבור $x\in\mathbb{R}_+$, קיימת סדרה כך ש- $a_1 = x$, $a_{n+1} = a_n\sqrt{2-a_n}$.

יש להוכיח: $0<x<1$. ($x\in(0,1)$). צ"ל קיים $\lim_{n\to\infty} a_n$, ולמצוא אותו.

יש משפט שכל סדרה מונוטונית וחסומה היא מתכנסת. לפי סעיף א' של השאלה, אנו יודעים* ש- $a_n < a_{n+1} = a_n\sqrt{2-a_n} < 1$ ולכן הסדרה מונוטונית עולה ($a_{n+1} > a_n$) והסדרה חסומה ($a_n < 1$) לכל n טבעי. $\frac{1}{4}$

לכן הסדרה מתכנסת לפי המשפט הנ"ל וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$.

בגלל שהסדרה מתכנסת, אז חייב להתקיים $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$

* רק אם גם כל a_n ש- $0<a_n<1$ מקיים את התנאי.

(המשך בדף הבא)

המשך של שאלה 3, ג

לכן, כאשר $n\to\infty$, אזי $a_{n+1}=a_n$, אז $a_n\sqrt{2-a_n}=a_n$ כנ"ל

$a_1>0$ ו- $a_{n+1}>a_n$, אזי כל a_n הוא חיובי:

$$a_n\sqrt{2-a_n}=a_n \Rightarrow a_n\left(\sqrt{2-a_n}-1\right)=0 \Rightarrow \sqrt{2-a_n}=1$$

$$\Rightarrow 2-a_n=1^2=1 \Rightarrow a_n=1$$

$a_n\neq 0$ כי a_n חיובי (סגור)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n=1}$$

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{7}$

מצאנו שכאשר $n\to\infty$, מהשוויון $a_{n+1}=a_n$ קבלנו ש $a_n=1$. ולכן:

של מציאת הגבול.

ד) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{5}{3})$?

ב- $a_n(\frac{5}{3})$, נתון ש- $a_1=\frac{5}{3}$. נמצא לאחר מכן את a_2.

$$a_2=a_1\sqrt{2-a_1}=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{6}{3}-\frac{5}{3}}=\frac{5}{3\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{25}{27}}<1$$

לכן $1>a_2$, ואז כמו שהוכחנו מעלה ג, אם מהאינדקס השני מתקיים $1>a_{n+1}>a_n$ (לכל $n\geq 2$) ואז הגבול יהיה שווה:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n(\tfrac{5}{3})=1}$$

$\frac{6}{6}$

שאלה 5

5

א) האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ מתכנס?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3n)!}{n!\,(2n)!\cdot 3^n}$$

נגדיר $a_n=\frac{(3n)!}{n!(2n)!\,3^n}$.

צריך למצוא האם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ מתכנס או מתבדר.

מכיוון שהטור חיובי, נפעיל עליו את מבחן המנה: המבחן אומר שאם הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$ קיים, אזי אם $l<1$ הטור מתכנס, אם $l>1$ אזי הטור מתבדר. נחשב את הגבול הזה עבור הטור שלנו:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(3(n+1))!}{(n+1)!\,(2(n+1))!\,3^{n+1}}}{\frac{(3n)!}{n!\,(2n)!\,3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(3n)!}\,(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{(2n)!}\cdot\cancel{3^n}}{\cancel{n!}\,(n+1)\cdot\cancel{(2n)!}\,(2n+1)(2n+2)\cdot\cancel{3^n}\cdot 3\cdot\cancel{(3n)!}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{3(n+1)(2n+1)(2n+2)}=$$

המשך בדף הבא:

המשך של 5, א׳:

$$\dots = \lim_{n\to\infty} \frac{27n^3+\dots}{12n^3+\dots} = \boxed{\frac{27}{12}}$$

(רק המקדמים של החזקה הגבוהה ביותר, n^3, משפיעים על ערך הגבול: יש לחלק ב-n^3 ואז כל ערך או משתנה בחזקה קטנה מ-n^3 הולך ל-0.)

קבלנו ממבחן המנה ש- $l=\frac{27}{12}>1$, ולכן הטור

מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\infty$

ב) האם האינטגרל מתכנס? $\int_0^\infty e^{-x^4}dx$

נוכיח שכן:

$$\int_0^\infty e^{-x^4}dx \underset{\text{אדיטיביות של אינטגרלים}}{=} \int_0^1 \frac{1}{e^{x^4}}dx + \int_1^\infty \frac{1}{e^{x^4}}dx$$

מכלל ההשוואה, אם $0<\frac{1}{e^{x^4}}$ לכל x (וזה כן) אז אם נמצא g כך ש- $f\le g$ לכל x אז $\int f\,dx\le\int g\,dx$.

— נוכיח שעבור כל $x\in[0,1]$, $\frac{1}{e^{x^4}}\le 1$:

$$\frac{1}{e^{x^4}}\le 1 \underset{(e^{x^4}>0)}{\Rightarrow} 1\le e^{x^4} \underset{(\ln\text{ פונק׳ מונוטונית})}{\Rightarrow} \ln 1\le \ln e^{x^4} \Rightarrow \underline{0\le x^4}$$

וזה נכון תמיד כי x^4 חייב להיות חיובי!

הוכחנו כי $\frac{1}{e^{x^4}}\le 1$ עבור $x\in[0,1]$.

— נוכיח שעבור $x\in[1,\infty)$, $\frac{1}{e^{x^4}}\le\frac{1}{e^x}$:

$$\frac{1}{e^{x^4}}\le\frac{1}{e^x} \underset{(e^{x^4},e^x>0)}{\Rightarrow} e^x\le e^{x^4} \underset{(\ln\text{ פונק׳ מונוטונית})}{\Rightarrow} \ln e^x\le\ln e^{x^4} \Rightarrow \underline{x\le x^4}$$

(נכון עבור כל $x\ge1$)

הוכחנו כי $\frac{1}{e^{x^4}}\le\frac{1}{e^x}$ עבור $x\in[1,\infty)$.

ולכן:

$$\int_0^\infty e^{-x^4}dx=\int_0^1\frac{1}{e^{x^4}}dx+\int_1^\infty\frac{1}{e^{x^4}}dx\le\int_0^1 1\,dx+\int_1^\infty\frac{1}{e^x}dx$$

המשך בדף הבא:

המשך ג 5

$$(\dots) = x\Big|_0^1 + \int_1^\infty e^{-x}dx = [\text{scribble}]\ 1 + \lim_{c\to\infty}(-e^{-x})\Big|_1^c$$

$$= \underline{1} + \lim_{c\to\infty}\left(-e^{-c} - (-e^{-1})\right) = 1 + (0 + e^{-1}) = 1 + e^{-1}$$ כנדרש

Q.E.D.

שאלה 6

(6)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x>0 \\ 4-3\cos x & x<0 \\ ? & x=0 \end{cases}$$

א) נמצא ערך כך ש-f תהיה רציפה ב-0:

כדי ש-f תהיה רציפה ב-0, הגבולות החד צדדיים צריכים להיות שווים ~~...~~ למה ושווים לערך של הפונק':

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

נמצא את הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \underset{(x>0)}{=} \lim_{x\to 0^+}(x^2+1) = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \underset{(x<0)}{=} \lim_{x\to 0^-}(4-3\cos x) = 4-3\cdot 1 = \boxed{1}$$

לכן אם נגדיר $f(0)=1$, אז f תהיה רציפה ב-0, כי אז הגבולות החד צדדיים שווים ל-1.

6/6 $\boxed{f(0)=1}$

ב) נוכיח שהפונקציה המתקבלת היא C^1 על $\mathbb{R}$.

את הפונקציה C^1 על $\mathbb{R}$, כלומר היא גזירה ברציפות לפחות פעם אחת.

נוכיח ש-f גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$:

- כאשר $0<x$, $f(x)=x^2+1$, שזה פונק' אלמנטרית ולכן גזירה, לכל $0<x$, הנגזרת היא $f'(x)=2x$.
- כאשר $0>x$, $f(x)=4-3\cos x$, שהיא גם פונקציה אלמנטרית ולכן גזירה לכל $0>x$, הנגזרת היא $f'(x)=3\sin x$.

המשך של 6, ב

- כאשר $x=0$, נוכיח כי f גזירה שם:
פונקציה גזירה בנק' מסוימת $\Leftrightarrow$ קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f_x-f_{x_0}}{x-x_0}$.
והגבול הזה קיים $\Leftrightarrow$ הגבולות החד צדדיים שלו קיימים.
נבדוק למה שווים הגבולות החד צדדיים:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\underset{(x>0)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}x=\boxed{0}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{4-3\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{3(1-\cos x)}{x}$$

$=$ (נעזר בלופיטל, כי יש מצב של $\frac{0}{0}$) $\overset{(\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{3(\sin x)}{1}=\lim_{x\to 0^-}3\sin x=\boxed{0}$

ולכן קיבלנו ש:

$$f'_+(0)=f'_-(0)=f'(0)=0$$

ולכן, הפונקציה גזירה גם ב-0.

אז, התקבל ש-f גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$. נבדוק שהנגזרת היא פונקציה רציפה:

$$f'(x)=\begin{cases}2x & x>0\\ 3\sin x & x<0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$f'(x)$ רציפה כאשר $x>0$, או $x<0$, כי היא מורכבת מפונקציות אלמנטריות. נבדוק האם היא רציפה ב-0:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}2x=0\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}3\sin x=0$$

ולכן $\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$ והפונקציה $f'(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

ואם כן, אז הוכחנו כי $f(x)$ היא C' על R

המשך של 6...ג

(ג) האם f היא C^2 על $\mathbb{R}$?

אם f היא C^2 על $\mathbb{R}$, אז גם הפונקציה $f''(x)$ חייבת להיות רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$ (כלומר, f גזירה ברציפות פעמיים).

נמצא את $f''(x)$:

$$f''(x)=\begin{cases}2 & x>0\\ 3\cos x & x<0\end{cases}$$

נראה ש$f''(x)$ לא C^2 על $\mathbb{R}$, כי $f''(x)$ לא רציפה ב-0:

$$\lim_{x\to0^-} f''(x)=\lim_{x\to0^-}3\cos x=\boxed{3}\ ,\qquad \lim_{x\to0^+} f''(x)=\boxed{2}$$

לכן $\lim_{x\to0^-} f''(x)\neq\lim_{x\to0^+} f''(x)$, ולכן הגבול $\lim_{x\to0} f''(x)$ לא קיים.

לכן, $f''(x)$ לא רציפה, ובפרט, גם לא גזירה ב-0, ולכן:

f היא לא C^2 על $\mathbb{R}$