בס״ד

אלגוריתם לפתרון נוסחאות נסיגה לינאריות הומוגניות:

נתונה נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית-

$$f(n)=p_1\cdot f(n-1)+p_2\cdot f(n-2)+p_3\cdot f(n-3)+\dots+p_k\cdot f(n-k)$$

נציב x^n במקום $f(n)$ בהתאמה ונקבל:

$$x^n=p_1\cdot x^{n-1}+p_2\cdot x^{n-2}+p_3\cdot x^{n-3}+\dots+p_k\cdot x^{n-k}$$

נחלק בחזקה הנמוכה ביותר של x, כלומר, נחלק ב- x^{n-k} ונקבל:

$$x^k=p_1\cdot x^{k-1}+p_2\cdot x^{k-2}+p_3\cdot x^{k-3}+\dots+p_{k-1}\cdot x+p_k$$

~~זהו~~ זהו הפולינום האופייני של נוסחת הנסיגה הנ״ל.

<u>שימו לב שבמקרה הפרטי שבו</u>: $f(n)=p_1\cdot f(n-1)+p_2\cdot f(n-2)$

אז: $x^n=p_1\cdot x^{n-1}+p_2\cdot x^{n-2}$

נחלק בחזקה הנמוכה ביותר של x, כלומר ב- x^{n-2} ונקבל:

$$x^2=p_1\cdot x+p_2$$

$$x^2-p_1x-p_2=0 \longrightarrow$$ זהו הפולינום האופייני!

<u>אז להלן שלבי האלגוריתם</u>:

<u>שלב 1</u>: מוצאים את הפולינום האופייני שהוא

<u>שלב 2</u>: פותרים את המשוואה הריבועית $x^2-p_1x-p_2=0$ ומוצאים שורשים x_1,x_2.

<u>שלב 3</u>: אם $x_1\neq x_2$ אז פתרון נוסחת הנסיגה הוא:

$$f(n)=a_1\cdot x_1^n+a_2\cdot x_2^n$$

ואם $x_1=x_2$ אז פתרון נוסחת הנסיגה הוא:

$$f(n)=a_1\cdot x_1^n+a_2\cdot n\cdot x_2^n$$

<u>שלב 4</u>: מוצאים את a_1,a_2 ע״י הצבה בתנאי ההתחלה (תנאי העצירה).

שימו לב שאם נוסחת הנסיגה הנתונה היא: $f(n)=p_1\cdot f(n-1)+p_2\cdot f(n-2)+p_3\cdot f(n-3)$

אז הפולינום האופייני הוא - $x^3-p_1\cdot x^2-p_2x-p_3=0$. מוצאים שורשים - x_1,x_2,x_3 ואז פתרון נוסחת הנסיגה הוא -

$$f(n)=a_1\cdot x_1^n+a_2\cdot x_2^n+a_3\cdot x_3^n$$ (כאשר $x_1\neq x_2\neq x_3$)

ואת a_1,a_2,a_3 מוצאים ע״י הצבה בתנאי ההתחלה.

דוגמאות:

1. נתונה נוסחת הנסיגה הבאה: $f(n)=\begin{cases}1 & ,\ n=0,1\\ f(n-1)+2f(n-2) & ,\ n\geq 2\end{cases}$.

א. הפולינום האופייני שלה הוא: x^2-x-2, ששורשיו הם: $x_1=-1\ ,\ x_2=2$.

לכן, פתרון כללי של נוסחא זו הוא: $f(n)=a_1\cdot(-1)^n+a_2\cdot 2^n$.

ב. נחשב את a_1,a_2 עפ"י תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases}a_1\cdot(-1)^0+a_2\cdot 2^0=f(0)=1\\ a_1\cdot(-1)^1+a_2\cdot 2^1=f(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e1:a_1+a_2=1\\ e2:-a_1+2a_2=1\end{cases}\Rightarrow_{e1+e2} 3a_2=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{2}{3}\Rightarrow_{e1} a_1=\frac{1}{3}$$

קיבלנו: $\forall n\in\mathbb{N}:f(n)=\frac{1}{3}(-1)^n+\frac{2}{3}\cdot 2^n=\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{3}$.

2. נתונה נוסחת הנסיגה הבאה: $f(n)=\begin{cases}0 & ,\ n=0\\ 1 & ,\ n=1\\ f(n-1)+f(n-2) & ,\ n\geq 2\end{cases}$. ⇐ (עשו-בהרצאה)

א. הפולינום האופייני שלה הוא: x^2-x-1, ששורשיו הם: $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. לכן, פתרון כללי של נוסחא זו הוא:

$$f(n)=a_1\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+a_2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

ב. נחשב את a_1,a_2 עפ"י תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases}a_1\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0+a_2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0=f(0)=0\\ a_1\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1+a_2\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1=f(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e1:a_1+a_2=0\Leftrightarrow a_1=-a_2\\ e2:\left(1-\sqrt{5}\right)a_1+\left(1+\sqrt{5}\right)a_2=2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{e1\to e2}\left(\sqrt{5}-1\right)a_2+\left(1+\sqrt{5}\right)a_2=2\Rightarrow 2\sqrt{5}\cdot a_2=2\Rightarrow a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow_{e1} a_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

קיבלנו:

$$\forall n\in\mathbb{N}:f(n)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

דוגמא שבה השורשים שווים!

3. נתונה נוסחת הנסיגה הבאה: $f(n)=\begin{cases}0 & , n=0\\ 1 & , n=1\\ 4f(n-1)-4f(n-2) & , n\geq 2\end{cases}$.

א. הפולינום האופייני שלה הוא: $x^2-4x+4=(x-2)^2$, ששורשיו הם: $x_1=x_2=2$. לכן, פתרון כללי של נוסחא זו הוא: $f(n)=a_1\cdot 2^n+n\cdot a_2\cdot 2^n$.

ב. נחשב את a_1,a_2 עפ"י תנאי ההתחלה:

נציב

$$\begin{matrix} n=0: \\ n=1: \end{matrix}\begin{cases}a_1\cdot 2^0+0\cdot a_2\cdot 2^0=f(0)=0\\ a_1\cdot 2^1+1\cdot a_2\cdot 2^1=f(1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e1: a_1=0\\ e2: 2a_1+2a_2=1\end{cases}\Rightarrow_{e1\to e2} 2a_2=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2=\frac{1}{2}$$

קיבלנו: $\forall n\in\mathbb{N}: f(n)=0\cdot 2^n+n\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{=2^{-1}}\cdot 2^n=n\cdot 2^{n-1}$.