פתרון תרגיל בית 2 – חדווא 1

שאלה 1

לכל סדרה מצא את החוקיות ורשום את האיבר הכללי.

א. $\frac{2}{3},\frac{-1}{9},\frac{-4}{27},...$.

ב. $2,-5,8,-11,...$.

ג. $2,3,6,11,18,27,...$.

פתרון

סעיף א

המונים של המספרים בסדרה יוצרים סדרה חשבונית שהפרשה -3 והאיבר הראשון שלה הוא 2.

האיבר הכללי של סדרה כזאת הוא $-3n+5$.

מהמכנה של המספרים בסדרה נקבל סדרה הנדסית שמנתה 3 והאיבר הראשון הוא 3 .

האיבר הכללי של סדרה כזאת הוא 3^n .

סה"כ נקבל $\frac{-3n+5}{3^n}$.

סעיף ב

הקשר בין סימן הסדרה למיקום שלו הוא הסימן של המספר $(-1)^{n+1}$.

סדרת הערכים המוחלטים היא סדרה חשבונית שהפרשה 3 והאיבר הראשון שלה הוא 2 .

האיבר הכללי של סדרה כזאת הוא $(-1)^{n+1}\cdot(3n-1)$.

סעיף ג

ההפרשים של הסדרה יוצרים סדרה חשבונית. נסמן את סדרת ההפרשים $d_1,d_2,...,d_{n-1}$.

ולכן איבר כללי בסדרה מיוצג ע"י האיבר הראשון ועוד סכום סדרת ההפרשים כלומר $a_n=2+d_1+d_2+...+d_{n-1}$.

סדרת ההפרשים היא סדרה חשבונית שהפרשה 2 והאיבר הראשון שלה הוא 1.

סכום סדרת ההפרשים הוא $\frac{(2n-2)\cdot(n-1)}{2}=\frac{[2\cdot1+(n-2)\cdot2]\cdot(n-1)}{2}=S_{n-1}$.

האיבר הכללי הוא $2+\frac{(2n-2)\cdot(n-1)}{2}$.

שאלה 2

עבור הסדרות הבאות רשמו נוסחה למציאת סכום n האיברים הראשונים.

א. $2+5+11+...+(3\cdot2^{n-1}-1)$.

ב. $\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{33}{8}+...+\frac{2^{2n-1}+1}{2^n}$.

ג. $\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+...+\frac{2}{(n+1)(n+3)}$.

פתרון

סעיף א

ניתן לרשום את סכום הסדרה גם באופן הבא:

$$(3\cdot2^0-1)+(3\cdot2^1-1)+(3\cdot2^2-1)+...+(3\cdot2^{n-1}-1)=3\cdot2^0+3\cdot2^1+3\cdot2^2+...+3\cdot2^3-1-1-1...-1$$

סכום של סדרה הנדסית שמנתה 2 והאיבר הראשון שלה הוא 3 שווה ל $3\cdot(2^n-1)$ ולכן סכום הסדרה הנתונה הוא $3\cdot(2^n-1)-n$.

סעיף ב

ניתן לרשום את האיבר הכללי של הסדרה גם באופן הבא: $\frac{2^{2n-1}+1}{2^n}=\frac{2^{2n-1}}{2^n}+\frac{1}{2^n}=2^{n-1}+\frac{1}{2^n}$.

נקבל שסכום הסדרה הנ"ל הוא סכום של סכומם של שתי סדרות הנדסיות.

סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא 1 ומנתה 2 ולכן סכומה 2^n-1.

סדרה הנדסית שהאיבר הראשון שלה הוא $\frac{1}{2}$ ומנתה $\frac{1}{2}$ ולכן סכומה $1-\frac{1}{2^n}$.

סה"כ סכום הסדרה $2^n-\frac{1}{2^n}-2$.

סעיף ג

נשים לב שניתן לרשום את האיבר הכללי בסדרה באופן הבא: $\frac{2}{(n+1)(n+3)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$.

סכום הסדרה הוא:

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{5}{6}-\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}$$

שאלה 3

קבע האם הסדרה חסומה מלמעלה\ למטה ומצא חסם מלעיל\ מלרע.

א. $\left\{\sin\frac{n\pi}{2} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

ב. $\left\{\frac{n^2}{2n^2-1} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

ג. $\left\{\frac{2^n}{n^2} : n\in\mathbb{N}\right\}$.

פתרון

סעיף א

הפונקציה $f(x)=\sin x$ היא פונקציה חסומה ולכן הסדרה הנ"ל חסומה כאשר החסם מלעיל שלה הוא 1 והחסם מלרע שלה הוא -1.

סעיף ב

מכיוון שהמונה והמכנה חיוביים לכל n טבעי נקבל שכל האיברים בסדרה חיוביים ולכן היא חסומה מלמטה ע"י 0.

נשים לב ש $n^2\le 2n^2-1$ לכל n טבעי ולכן הסדרה חסומה מלמעלה ע"י 1.

סעיף ג

כל איברי הסדרה הם מספרים חיוביים ולכן היא חסומה מלמטה ע"י 0.

הסדרה לא חסומה מלמעלה.