תרגיל 2 בחשבון אינפיניטסימלי 1 – 88-132 – תש"פ – להגשה בתאריך 19.11.19

1. יהי $(F,+,\cdot)$ שדה.

א. הוכיחו כי האיבר הניטרלי לחיבור של השדה הוא יחיד (נהוג לסמנו 0_F).

נניח כי a,b הם שני איברים ניטרליים לחיבור. אז $a=a+b=b$ באשר השוויון השמאלי כי b ניטרלי לחיבור והשוויון הימני כי a ניטרלי לחיבור.

ב. יהי $a\in F$. הוכיחו כי האיבר הנגדי של a הוא יחיד (נהוג לסמנו $-a$).

נניח כי b,c מקיימים $a+c=c+a=0,\quad a+b=b+a=0$. אז $a+b=a+c$ וע"י הוספת b משמאל נקבל $b+a+b=b+a+c$ כלומר $0+b=0+c$ כלומר $b=c$.

ג. הוכיחו כי לכל $a\in F$ מתקיים $a\cdot 0_F=0_F$.

$$a\cdot 0=a\cdot(0+0)=a\cdot 0+a\cdot 0$$

המעבר הראשון כי 0 ניטרלי לחיבור, המעבר השני לפי דיסטריביוטיביות. כעת נוסיף את $-a\cdot 0$ לשני האגפים ונקבל

$$0=a\cdot 0$$

כדרוש.

2. יהי $(F,+,\cdot,\le)$ שדה סדור, $a,b,c,d\in F$.

א. הוכיחו כי אם $a\le b$ וגם $c\le d$ אז $a+c\le b+d$.

נוסיף c לשני האגפים של $a\le b$ (לפי אקסיומה 1 של שדה סדור)

$$a+c\le b+c$$

נוסיף b לשני האגפים של $c\le d$ (כנ"ל)

$$b+c\le b+d$$

לפי טרנזיטיביות של יחס סדר מקבלים את הדרוש.

ב. הוכיחו כי $a\ge 0$ אם ורק אם $-a\le 0$.

ע"י הוספת $-a$ לשני האגפים.

ג. נתון כי $c\le 0$. הוכיחו כי אם $a\le b$ אז $bc\le ac$.

לפי סעיף ב', $-c\ge 0$. לכן לפי אקסיומה 2 של שדה סדור, $a\cdot(-c)\le b\cdot(-c)$

נראה כי מתקיים $a(-c)=-(ac)$. צריך להראות כי ac הוא הנגדי של $a(-c)$ ואכן $a(-c)+ac=a(-c+c)=a\cdot 0=0$ (משמאל לימין דיסטריביוטיביות בשדה, הגדרת הנגדי, שאלה 1ג'). באותו האופן גם $b(-c)=-(bc)$. ולכן מקבלים

$$-ac\le -bc$$

וע"י הוספת bc ואז ac לשני האגפים (אקסיומת שדה סדור) מקבלים את הדרוש.

3. הוכיחו / הפריכו:

א. לכל קבוצה של מספרים ממשיים יש לפחות חסם מלעיל אחד או לפחות חסם מלרע אחד.

הפרכה: קבוצת השלמים Z לא חסומה מלעיל וגם לא מלרע.

ב. לכל קבוצה של מספרים ממשיים שיש לה לפחות חסם מלעיל אחד יש חסם תחתון.

הפרכה: קבוצת כל השלמים השליליים חסומה מלעיל למשל ע"י 0, אבל לא מלרע ולכן גם אין לה חסם תחתון.

ג. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים שיש לה לפחות חסם מלרע אחד יש לפחות חסם מלעיל אחד.

הפרכה: קבוצת הטבעיים חסומה מלרע למשל ע"י 0 אבל היא לא חסומה מלעיל.

ד. לכל קבוצה לא ריקה של של מספרים רציונליים בעלת מקסימום יש חסם עליון רציונלי.

הוכחה: המקסימום הוא רציונלי (אחד מאיברי הקבוצה). ראינו כי אם לקבוצה יש מקסימום אז הוא גם החסם העליון שלה. לכן גם החסם העליון הוא רציונלי.

ה. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים יש חסם עליון אחד ויחיד.

הפרכה: הטבעיים (לא חסומים מלעיל ולכן אין חסם עליון)

ו. לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים יש חסם תחתון אחד ויחיד.

הוכחה: תהי $\phi \neq A \subset R$ חסומה מלרע ע"י m. אז $-A$ חסומה מלעיל ע"י $-m$, ולכן לפי אקסיומת השלמות של המספרים הממשיים ל-$-A$ יש חסם עליון, ולכן ל-A יש חסם תחתון (ראו שאלה 6). אם a,b חסמים תחתונים של A אז כיוון ש-$\leq$ יחס סדר מלא יש אחת מ-3 אפשרויות: 1. $a = b$ (ואז יש רק חסם תחתון אחד) 2. $a < b$ ואז כיוון ש-a חסם תחתון (חסם מלרע גדול ביותר) אז b איננו חסם תחתון, בסתירה 3. $a > b$ ואז כיוון ש-b חסם תחתון אז a איננו חסם תחתון, בסתירה. לכן אפשרות 1 היא זו המתקיימת.

ז. לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים קיים חסם תחתון.

הוכחה: לכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש מינימום (עקרון הסדר הטוב). כל מינימום הוא חסם תחתון.

ח. קיימת קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים אשר החסם העליון שלה שווה לחסם התחתון שלה.

הוכחה: נבחר למשל את $A = \{\pi + e\}$ (או כל קבוצה אחרת בעלת איבר אחד).

ט. קיימת קבוצה של מספרים ממשיים אשר החסם העליון שלה שווה לחסם התחתון שלה ואשר אין לה מקסימום.

הפרכה: נוכיח ראשית כי אם A קבוצה כך ש-$sup(A) = inf(A)$ אז A בעלת איבר אחד. נניח כי יש בה שניים, $a,b \in A$ ונראה כי הם שווים. מתקיים $inf(A) \leq a \leq sup(A)$ אך $inf(A) = sup(A)$ לכן $a = inf(A) = sup(A)$. באותו האופן $b = inf(A) = sup(A)$ ולכן $a = b$.

4. הוכיחו כי אם $A \subset \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל אז M חסם עליון של A אם ורק אם M חסם מלעיל של A וגם לכל $\epsilon > 0$ ממשי קיים $a \in A$ כך ש-$M - \epsilon < a$.

הגדרנו M חסם עליון של A כך: (i) M חסם מלעיל של A (ii) לכל $M' < M$, M' איננו חסם מלעיל של A.

M' חסם מלעיל של A משמעו: $\forall a \in A \ \ a \leq M'$, ולכן M' איננו חסם מלעיל של A משמעו: $\exists a \in A \ \ a > M'$.

ולכן מקבלים שההגדרה לעיל שקולה ל- (i) M חסם מלעיל של A (ii) לכל $M' < M$ קיים $a \in A$ כך ש-$a > M'$.

כיוון שכל $M' < M$ ניתן לרשום כ-$M' = M - \epsilon$ עבור $\epsilon > 0$, מש"ל.

5. יהיו $S \subseteq T \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל. הוכיחו כי $sup(S) \leq sup(T)$.

הקבוצות לא ריקות וחסומות מלעיל לכן לפי אקסיומת השלמות אכן קיימים $sup(S), sup(T)$.

מתקיים $\forall t \in T: t \leq sup(T)$ ולכן גם $\forall s \in S: s \leq sup(T)$ כי $S \subseteq T$. כלומר $sup(T)$ הוא חסם מלעיל של S ולכן $sup(S) \leq sup(T)$ כי $sup(S)$ הוא החסם מלעיל הקטן ביותר של S.

6. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל. נגדיר $B = \{-a \mid a \in A\}$. הוכיחו כי B חסומה מלרע וכן כי $inf(B) = -sup(A)$.

A חסומה מלעיל לכן יש M כך שלכל $a \in A$ מתקיים $a \leq M$. נראה כי B חסומה מלרע ע"י $-M$. יהי $b \in B$. קיים $a \in A$ כך ש-$b = -a$ כלומר $a = -b$. אז $a \leq M$ כלומר $-b \leq M$ כלומר $b \geq -M$ שזה מה שרצינו להראות.

נשאר להראות ש- $inf(B) = -sup(A)$. יש להראות כי $-sup(A)$ הוא חסם מלרע של B וכי הוא הגדול ביותר מכל חסמי המלרע של B.

מתקיים $\forall a \in A: a \leq sup(A)$ כלומר $\forall a \in A: -a \geq -sup(A)$ כלומר $\forall b \in B: b \geq -sup(A)$ ואכן $-sup(A)$ חסם מלרע של B.

לסיום יהי $x > -sup(A)$. יש להראות ש-x איננו חסם מלרע של B כלומר כי יש $b \in B$ כך ש-$b < x$.

כיוון ש-$-x < sup(A)$ ו-$sup(A)$ חסם עליון של A אז $-x$ איננו חסם מלעיל של A כלומר יש $a \in A$ כך ש-$a > -x$ כלומר $-a < x$.

נבחר את $b = -a$ והוא מקיים $b < x$ כדרוש.

7. לכל אחת מהקבוצות הבאות מיצאו (והוכיחו) חסם עליון, חסם תחתון, מקסימום, מינימום (אם קיימים):

א. $A = \{5 + \frac{2}{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $5 + \frac{2}{3n} \leq 5\frac{2}{3}$ כי $3n \geq 3$, כלומר $5\frac{2}{3}$ חסם מלעיל. אך הוא גם איבר בקבוצה ($n = 1$) לכן הוא המקסימום, ולכן הוא גם החסם העליון. A חסומה מלרע ע"י 5. נראה שזהו החסם התחתון. אם $\epsilon > 0$ צריך למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$5 + \frac{2}{3n} < 5 + \epsilon$ כלומר $\frac{2}{3n} < \epsilon$ כלומר $n > \frac{2}{3\epsilon}$ ואכן ניתן לבחור n כזה לפי ארכימדיות. לכן 5 הוא החסם התחתון. הוא איננו איבר בקבוצה לכן הוא איננו מינימום. לכן לקבוצה אין מינימום, כי לו היה לה מינימום הוא היה גם החסם התחתון (5).

ב. $B = \{\frac{1}{n^2} + 6 \cdot (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$6\frac{1}{4}$ איבר בקבוצה ($n=2$). נראה כי הוא המקסימום: עבור n-ים איזוגיים מתקבלת תוצאה שלילית, ועבור n-ים זוגיים צריך להראות ש- $6+\frac{1}{n^2} < 6\frac{1}{4}$ וזה נכון כי $n \geq 2$. לכן הוא גם החסם העליון.

נראה כי -6 חסם תחתון. הוא חסם מלרע כי עבור n-ים זוגיים מתקבלת תוצאה חיובית, ועבור n-ים אי-זוגיים $\frac{1}{n^2}-6 \geq -6$. יהי $\epsilon > 0$. צריך להראות שיש $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$-6+\epsilon > \frac{1}{n^2}+6\cdot(-1)^n$. עבור n-ים אי-זוגיים מקבלים $-6+\epsilon > \frac{1}{n^2}-6$ כלומר $n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$. לפי ארכימדיות אכן קיים n כזה. (כלומר לפי ארכימדיות קיים n טבעי כזה וברור שאו שהוא אי-זוגי או שכאשר נוסיף לו 1 הוא יהיה אי-זוגי). יחד עם זאת הוא איננו המינימום כי הוא לא איבר בקבוצה. לכן גם אין לקבוצה זו כל מינימום, כי המינימום, אם קיים, שווה לחסם התחתון.

ג. $C=\{n+\frac{1}{m} \mid n,m \in \mathbb{N}\}$

הקבוצה לא חסומה מלעיל (הרי $\mathbb{N} \subset C$) לכן אין חסם עליון ואין מקסימום.

נראה כי 1 הוא החסם התחתון. ראשית הוא חסם מלרע כי $n+\frac{1}{m} > n \geq 1$. יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $n,m \in \mathbb{N}$ כך ש-$1+\epsilon > n+\frac{1}{m}$. אפשר לבחור $n=1$ ו-$m > \frac{1}{\epsilon}$, שקיים לפי ארכימדיות. $1 \notin C$ לכן הוא איננו מינימום, ולכן כיוון שהוא החסם התחתון, לקבוצה אין מינימום.

ד. $\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\right)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

המינימום הוא $\frac{-1}{12}$ (מתקבל בהצבת $n=1$), ולכן הוא גם החסם התחתון. החסם העליון הוא $\frac{1}{4}$: ברור כי הוא חסם מלעיל ואם $\epsilon > 0$ אז צריך למצוא $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{4}-\epsilon < \frac{1}{4}-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ מה שאפשרי לפי ארכימדיות. הוא איננו המינימום כי הוא לא איבר בקבוצה. ולכן לקבוצה אין מינימום כיוון שהוא החסם התחתון.