כתב: בנימין לוין
levbinyamin@gmail.com

הרצאה 1

Rony.bitan@gmail.com

90% מבחן +10% בוחן

מבנים אלגברים עם פעולה אחת

הגדרה: מערכת אלגברית עם פעולה בינרית אחת היא הזוג $(S,*)$ כאשר S היא קבוצת איברים לא ריקה ו-* היא פעולה בינרית המוגדרת על איברי S. * שומר על סגירות בS

הגדרה: שתי מערכות אלגבריות S,T, עם פעולה אחת * תקראנה שקולות (איזומורפיזם) אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: S \to T$ המשמרת את הפעולה של S, כלומר

$$\forall a,b \in S : f(a*b) = f(a)*f(b)$$

הגדרה: מערכת אלגברית (S,*) תקרא אגודה או חבורה למחצה אם היא מקיימת את החוק האסוציאטיבי (הקיבוץ) אם: $\forall a,b,c \in S: a*(b*c) = (a*b)*c$

הערה: באגודה מותר להשתמש בחוקי חזקות.

הגדרה: במערכת (S,*) איבר b יקרא נטרלי מימין אם מתקיים $\forall a \in S: a*b = a$

במערכת (S,*) איבר b יקרא נטרלי משמאל אם מתקיים $\forall a \in S: b*a = a$

אבר נטרלי מימין ומשמאל יקרא נטרלי, במקרה זה נסמנו e.

טענה: אם קיים איבר נטרלי מימין b וגם קיים נטרלי משמאל a אז a=b

מסקנה: אם קיים איבר נטרלי אזי הוא יחיד.

הגדרה: אגודה עם איבר ניטרלי תיקרא מונואיד.

במונואיד (S,*) איבר a יקרא:

הפיך מימין-אם קיים אבר b כך ש a*b=e

הפיך משמאל-אם קיים אבר b כל ש b*a=e

הפיך: אם קיים אבר b כך ש a*b=b*a=e. אזי נסמן $a = b^{-1}$

<u>טענה:</u> אם לאיבר a במונואיד קיים הופכי מימין b ומשמאל c אזי הם שווים

<u>הוכחה:</u> $c = c * e = c * (a * b) = (c * a) * b = e * b = b$

<u>הגדרה:</u> א)מונואיד שכל אבריו הפיכים נקרא חבורה group.

ב)נאמר שחבורה (s,*) היא קומוטטיבית או אבלית אם $\forall a, b \in S : a * b = b * a$

ג)חבורה ציקלית היא חבורה שנוצרת מאבר אחד בה

$$\exists g \in G: < g > := \{g^i : i \in Z\}$$

<u>טענה:</u> כל חבורה ציקלית היא בהכרח אבלית

<u>הוכחה:</u> $\forall a, b \in S : a = g^{i \in Z}, b = g^{j \in Z}$

$$a * b = g^i * g^j = g^{i+j} \underbrace{=}_{\text{חוקי חזקות באגודה}} g^j g^i = b * a$$

דוגמאות: 1)קבוצת שורשי היחידה $x^n = 1$ מעל C היא $\Omega_n = \{cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right) : k = 1, .., n-1\}$

$$\left[cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^k = cis\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$
$$cis\theta_1 * cis\theta_2 = cis(\theta_1 + \theta_2)$$

לכן <u>נסמן</u> $W_n = cis\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

$$\Omega_n = < W_n > = \{1, W_n, W_n^2 \dots, w_n^{n-1}\}$$

2) $R^* = R - \{0\}, Q^* = Q - \{0\}$ לגבי כפל הם חבורות אבליות אינסופיות אך אינם ציקליות.

3) $M_n(R)$ לגבי חיבור-חבורה אבלית לא צקלית.

4) $GL_n(R)$ לגבי כפל מטריצות- חבורה לא אבלית.

<u>סימון:</u> עבור מונואיד (M,*) נסמן ב Gr(M,*) את קבוצת כל ההפיכים במונואיד

<u>טענה:</u> <u>Gr(M,*)</u> היא חבורה.

<u>הוכחה:</u> 1)תכונת האסוציאטיביות היא תורשתית מהמונואיד.

2)קיום איבר נטרלי: $e * e = e \to e \in Gr(M,*)$

3) סגירות: $\forall a, b \in Gr(M,*) : (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in Gr(M,*)$

קיום ההופכי: $a \in Gr \to \exists a^{-1} \in M : aa^{-1} = e \to a^{-1} \in Gr$

4) כל האיברים הפיכים : ע"פ הגדרה.

תת חבורה:

הגדרה: תהא (G,*) חבורה, תת קבוצה $H \subseteq G$ נקראת תת-חבורה ונסמן $H \leq G$, אם H היא חבורה,
כלומר אם 1) $e \in H$ 2) סגירות 3) $\underline{\forall a \in H : a^{-1} \in H}$

דוגמאות: 1) $(Z,+)$: $\forall n \in Z : nZ = <n> \leq Z$
$$<3> = 3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$$

2) $SL_n(R) = \{A \in M_n(R) : |A| = 1\} \leq GL_n(R)$

חבורות קונגרואנציה

הגדרה: עבור $n \in N$ נגדיר את היחס הבא על Z :

$$\forall x, y \in Z : x \overset{mod\, n}{\approx} y \Leftrightarrow x = y \bmod n \Leftrightarrow \exists k \in Z : x - y = k * n$$

למשל $2 = 5mod3 = 8mod3$

כלומר כל Z מתחלקת לקבוצות זרות = שאריות מודולו n
מסמנים כל מחלקה עם שארית k ע"י $\bar{k}$.

הגדרה: המבנה $Z_n = \{0,1, \ldots, n-1\}$ הוא חבורה ונקראת חבורת קונגרואציה, או חבורת השאריות מודולו n.