פתרון תרגיל 2 אינפי 3

1. נבדוק האם הקבוצות פתוחות/סגורות:

(א) נשים לב שהקבוצה A היא בעצם כל התחום שמתחת לישר $y = x$, לא כולל הישר עצמו. לכן, הקבוצה פתוחה, מכיוון שלכל $a \in A$ אפשר לסמן את מרחק הנקודה מהישר שלנו ב d_a, ואז הכדור $B(a, d_a)$ מוכל ממש בקבוצה. הקבוצה לא סגורה, מכיוון שהמשלים אינה פתוחה - עבור הנקודה $(1,1) \in A^c$ לא קיים $r > 0$ כך שהכדור $B((1,1), r)$ מוכל בקבוצה A^c. ברור שהקבוצה A לא חסומה. כעת, $x \in LimA$ אם לכל $r > 0$ קיים $a \in A$ כך ש: $a \in B(x, r)$. מכיוון ש־A קבוצה פתוחה, $A \subseteq LimA$. בנוסף, לכל נקודה (b, b) ולכל $r > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־$a \in B((b,b), r)$, למשל $a = (b, b - \frac{r}{2})$; לכן: $\{(b,b)|b \in \mathbb{R}\} \subseteq LimA$. מצד שני, לכל נקודה אחרת (x,y) (שנמצאת מעל הישר $y = x$), נסמן ב־d את המרחק שלה מהישר $y = x$, ואז לא קיים $a \in A$ כך ש: $a \in B((x,y), d)$. לכן סה"כ:

$$LimA = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq y\}$$

(ב) הקבוצה B לא פתוחה, מכיוון שלנקודה $(0,5)$ לא קיים $r > 0$ כך ש$B((0,5), r) \subseteq$ ־A. מצד שנית הקבוצה גם אינה סגורה, כי המשלים אינה פתוחה; עבור הנקודה $(\sqrt{24}, 5) \in B^c$ לא קיים $r > 0$ כך ש־$B((\sqrt{24}, 5), r) \subseteq B^c$. ברור שהקבוצה אינה חסומה. לגבי נקודות הגבול (בדומה לסעיף הקודם), קל לראות שמתקיים:

$$LimB = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 25, x^2 - y^2 \geq 1\}$$

אפשר לצייר את הקבוצות כדי להמחיש זאת.

2. נזכור: $x \in LimA$ אם לכל $r > 0$ קיים $a \in A$ $(x \neq a)$ כך שמתקיים $a \in B(x, r)$.

(א) נפריך את הטענה:

$$A = \{(\frac{1}{n}, 0) | n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{(-\frac{1}{n}, 0) | n \in \mathbb{N}\}$$

ואז $LimA = LimB = \{(0,0)\}$ (ולכן $LimA \cap LimB = \{(0,0)\}$) אך $Lim(A \cap B) = Lim(\phi) = \phi$.

(ב) הוכחה, נשתמש בהכלה דו־כיוונית: יהי $x \in LimA \cup LimB$. בה"כ, $x \in LimA$. לכן, לכל $r > 0$ קיים $a \in A \subseteq A \cup B$ כך ש־$a \in B(x,r)$ ולכן $x \in Lim(A \cap B)$. לכיוון השני, יהי $x \in Lim(A \cap B)$. נניח בשלילה ש$x \notin LimA$ וגם $x \notin LimB$. לכן, קיימים $0 < r_A, r_B$ כך שלכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ מתקיים: $b \notin B(x, r_B), a \notin B(x, r_A)$. נסמן: $r = min\{r_B, r_A\}$. מכיוון ש־$x \in Lim(A \cap B)$, קיים $a \in A \cup B$ כך ש־$a \in B(x,r)$. בה"כ, $a \in A$ ואז $a \in B(x,r) \subseteq B(x, r_A)$ וסתירה. לכן, $x \in LimA \cup LimB$.

(ג) הפרכה:

$$A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$$

$$B = [0,1]$$

ואז: $LimA \times LimB = \{0\} \times [0,1]$ אך $Lim(A \times B) = A \times B$.

(ד) הפרכה:

$$A = \{x^2 + y^2 < 25\}$$

$$B = \{x^2 + y^2 \leq 25\}$$

ואז $LimA \backslash LimB = \phi$ אך $Lim(A \backslash B) = A \backslash B$.

(ה) הפרכה:

$$A = [0, \frac{1}{2})$$

$$B = [\frac{1}{2}, 1]$$

ואז: $LimA \triangle LimB = [0,1] \backslash \{\frac{1}{2}\}$ אך $Lim(A \triangle B) = [0,1]$.

3. נניח בשלילה שהחיתוך הוא ריק. לכן:

$$\mathbb{R}^n = \phi^c = (\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

לפי דה־מורגן, ולכן $X \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i^c$. X קומפקטי, והקבוצות A_i^c פתוחות (כי המשלימות שלהן סגורות), ולכן קיים תת כיסוי סופי של X:

$$X \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq s} A_{i_k}^c$$

אך מצד שני $X \supseteq \bigcap A_{i_k} \neq \phi$ כי החיתוך הוא סופי, כלומר קיים $x \in \bigcap A_{i_k}$, אלא שאז $x \in X$ ולכן גם $x \in \bigcup A_{i_k}^c = (\bigcap A_{i_k})^c$ וסתירה. לכן, החיתוך אינו ריק.

4. הפנים של קבוצה מוכל בה, ולכן $(A^o)^o \subseteq A^o$. לצד שני, יהי $x \in A^o$. לכן קיים $r > 0$ עבורו $B(x,r) \subseteq A$. נראה שקיים r_o עבורו $B(x,r_o) \subseteq A^o$. כלומר, לכל $x_o \in B(x,r_o)$, קיים $r_{oo} > 0$ עבורו $B(x_o,r_{oo}) \subseteq A$. אפשר לקחת $r_o = \frac{r}{2}, r_{oo} = \frac{r}{4}$ ולקבל את הדרוש. *הפנים של קבוצה פתוחה שווה לקבוצה עצמה, ופנים הוא קבוצה פתוחה. אם משתמשים בידע הזה זה די ברור.