

## תרגיל 7 טור טיילור

הנושא: טורי טיילור

עליך לפתור 5 שאלות מבין 8 השאלות הראשונות.

1. מצא באמצעות ההגדרה את :

- א. פולינום מקלורן מסדר 4 של הפונקציה  $f(x) = xe^{-x}$ .
  - ב. פולינום מקלורן מסדר 6 של הפונקציה  $f(x) = \sin^2 x$ .
  - ג. פולינום מקלורן מסדר 5 של הפונקציה  $f(x) = \arctan x$ .
  - ד. פולינום מקלורן מסדר 3 של הפונקציה  $f(x) = \tan x$ .
  - ה. פולינום טיילור מסדר 3 של הפונקציה  $f(x) = \sqrt{x}$  סביב  $x = 9$ .
- בסעיפים א, ב, ה רשום גם מהי השארית בצורת לגרנז'.

2. השתמש בפולינומים אשר פיתחת לעיל וקבל קירובים לערכים של :

א.  $\frac{1}{e}$     ב.  $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$     ג.  $\sqrt{10}$

3. השתמש בטור מקלורן של  $e^x$  ( $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ) וחשב את  $\sqrt{e}$  בדיוק של 4 ספרות אחרי

הנקודה, ע"י מציאת הסדר ( $n$ ) הקטן ביותר של הפולינום אשר יתן את המבוקש. לאחר החישוב, בדוק (באמצעות מחשבון) שאכן חישובך עמד בדרישה.

בתרגילים הבאים נראה כיצד ניתן לקבל טורי טיילור ללא שימוש ישיר בהגדרה אלא ע"י ביצוע פעולות מתמטיות בטורים המוכרים (הצבות, פעולות אריתמטיות, גזירה ואינטגרציה). נשתמש בתכונות הבאות (ללא הוכחתן):

- א. אם פונקציה מיוצגת ע"י טור חזקות בקטע מסוים אז הטור הוא טור טיילור של הפונקציה.
- ב. טור טיילור המייצג פונקציה ניתן לגזירה איבר-איבר בכל קטע פתוח המוכל בתחום ההתכנסות שלו, והטור המתקבל הוא הטור טיילור של נגזרת הפונקציה.
- ג. ניתן לבצע אינטגרציה לטור טיילור המייצג פונקציה איבר-איבר בכל קטע פתוח המוכל בתחום ההתכנסות שלו, והטור המתקבל הוא הטור טיילור של האינטגרל של הפונקציה. ניתן לקבל באופן זה גם אינטגרל מסוים של פונקציה המיוצגת ע"י טור טיילור כטור,

בתנאי שגבולות האינטגרציה נמצאים בתוך תחום ההתכנסות.

8. א. הצב  $2x$  במקום  $x$  בטור מקלורן של  $\cos x$  והשתמש בזהות  $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

לקבלת טור חזקות עבור  $\sin^2 x$ . מתכונה א נובע שזהו הטור מקלורן של  $\sin^2 x$

(והוא יתכנס לכל  $x$  ממשי כמו  $\cos x$ ). וודא שאכן זהו הטור שקבלת בתרגיל 3.

ב. קבל את חמשת המחברים הראשונים בטור של  $\sin^2 x$  ע"י כפל הטור של  $\sin x$  בעצמו ובדוק שהם תואמים לאשר קבלת בסעיף א.

9. בדוק ע"י מכפלת  $x$  בטור מקלורן של  $e^x$  שהטור שקבלת בתרגיל 3 ל- $xe^x$  נכון.

10. קבל טורי מקלורן של הפונקציות הבאות באמצעות הצבות (בטורים המוכרים) וביצוע פעולות אריתמטיות.

א.  $x \sin(x^2)$  ב.  $e^{-x} \cos x$  (די במציאת חמשת המחברים הראשונים בטור).

11. בתרגיל זה נמצא את טור מקלורן של  $\arctan x$ .

א. גזור את הפונקציה  $f(x) = \arctan x$ .

ב. השתמש בטור של  $\frac{1}{1-x}$  וקבל ע"י הצבה טור המתאים ל- $f'(x)$ . שים לב מהו

תחום ההתכנסות של הטור.

ג. בצע אינטגרציה לטור שקבלת בסעיף ב והסק מהו הטור של  $f(x)$  (עד כדי קבוע האינטגרציה).

ד. מצא את קבוע האינטגרציה בטור שקבלת וקבל את הטור של  $\arctan x$ .

שים לב – התכנסות הטור מובטחת מתכונה ג רק בקטע הפתוח שציינת

בסעיף ב אך תיתכן התכנסות גם בקצות הקטע ואכן במקרה זה תחום ההתכנסות

$$[-1, 1]$$

ה. בתרגיל 1 ג מצאת את פולינום מקלורן של  $\arctan x$  מסדר 3. בדוק אותו

בהתאם לטור מקלורן של  $\arctan x$  שקבלת בסעיף ד.

האם היית מצליח לקבל את הטור באופן שהתחלת בתרגיל 1 ג?

12. בדוק באמצעות טורים את הנגזרות הבאות:

$$[\sin x]' = \cos x \quad \text{ב.} \quad [e^x]' = e^x \quad \text{ג.} \quad [e^{x^2}]' = 2xe^{x^2}$$

*בהצלחה!*