

פתרון תרגיל בית 5

שאלה 1

נתונים $B_2 = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ בסיסים של $P_2[x]$, $B_1 = \{1+x, 1-x^2, -x+x^2\}$

א. מצאו את וקטורי הקואורדינטות של איברי הבסיס B_1 לפי הבסיס B_2 (במילים אחרות –

מטריצת המעבר מ B_1 ל- B_2 .

ב. נתון וקטור v כך ש $[v]_{B_1} = (1, 2, 1)$. מצאו את $[v]_{B_2}$.

פתרון שאלה 1

א.

$$1+x = 1 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot (1+x^2) \rightarrow [1+x]_{B_2} = (1, 0, 0)$$

$$1-x^2 = 1 \cdot (1+x) - 1 \cdot (x+x^2) + 0 \cdot (1+x^2) \rightarrow [1-x^2]_{B_2} = (1, -1, 0)$$

$$-x+x^2 = -1 \cdot (1+x) + 0 \cdot (x+x^2) + 1 \cdot (1+x^2) \rightarrow [-x+x^2]_{B_2} = (-1, 0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ לכן מטריצת המעבר היא:}$$

ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

יהא $V = \mathbb{R}^2$, עם הבסיסים $B = \{(4,5), (1,0)\}$, $C = \{(1,1), (2,3)\}$.

מצא את המטריצה P המקיימת $P[v]_B = [v]_C$.

פתרון שאלה 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ מטריצת המעבר היא} \begin{pmatrix} 4,5 \\ 1,0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (1,1) + 1 \cdot (2,3) \\ (1,0) = 3 \cdot (1,1) + (-1) \cdot (2,3)$$

שאלה 3

יהיו $A, B \in F^{m \times n}$ הוכח:

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \quad \text{א.}$$

$$\text{rank}(A+\alpha B) \geq |\text{rank}(A) - \text{rank}(B)| \quad \text{ב. לכל } 0 \neq \alpha \in F \text{ מתקיים:}$$

פתרון שאלה 3

א. יהיו $a_i, 1 \leq i \leq n$, העמודות של A ו $b_j, 1 \leq j \leq n$, העמודות של B .

$$C(A+B) = \text{span}(\{a_i + b_i \mid 1 \leq i \leq n\})$$

$$C(A)+C(B) = \text{span}(\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}) + \text{span}(\{b_j \mid 1 \leq j \leq n\}) = \text{span}(\{a_i, b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\})$$

$$\text{span}(\{a_i + b_i \mid 1 \leq i \leq n\}) \subseteq \text{span}(\{a_i, b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}) \Rightarrow C(A+B) \subseteq [C(A)+C(B)]$$

$$\Rightarrow \dim(C(A+B)) \leq \dim C(A) + \dim C(B) \Rightarrow \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

ב.

$$C(A+\alpha B) = \text{span}(\{a_i + \alpha b_i \mid 1 \leq i \leq n\})$$

$$C(A)-C(B) = \text{span}(\{a_i \mid 1 \leq i \leq n\}) + \text{span}(\{-b_j \mid 1 \leq j \leq n\}) = \text{span}(\{a_i, -b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\})$$

$$\text{span}(\{a_i, -b_j \mid 1 \leq i, j \leq n\}) \subseteq \text{span}(\{a_i + \alpha b_i \mid 1 \leq i \leq n\}) \Rightarrow [C(A)-C(B)] \subseteq C(A+\alpha B)$$

$$\Rightarrow \dim C(A+\alpha B) \geq \dim(C(A)-C(B)) \Rightarrow \text{rank}(A+\alpha B) \geq |\text{rank}(A) - \text{rank}(B)|$$

שאלה 4

תהי $A \in F^{n \times n}$ הוכח שהתנאים הבאים שקולים:

א. A אינה הפיכה.

ב. עמודות A תלויות לינארית.

ג. $\text{rank}(A) < n$.

ד. שורות A תלויות לינארית.

ה. קיים $b \in F^n$ כך שלמערכת $Ax = b$ אין פתרון.

ו. למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי.

פתרון שאלה 4

א \Leftarrow ב: אם A אינה הפיכה אזי A^t אינה הפיכה ושקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים לכן יש לפחות 2 שורות ת"ל לכן עמודות A ת"ל.

ב \Leftarrow ג: אם עמודות A ת"ל אזי היא שקולות עמודות למטריצה עם עמודת אפסים אחת לפחות לכן $\text{rank}(A) < n$.

ג \Leftarrow ד: $\text{rank}(A) < n$ לכן היא שקולת שורות למטריצה עם לפחות שורת אפסים אחת לכן השורות ת"ל.

ד \Leftarrow ה: שורות A ת"ל לכן שקולות שורה למטריצה עם שורת אפסים, ניקח b שבו מול שורת האפסים לאחר הדירוג יש איבר שונה מאפס ולמערכת זו אין פתרון.

ה \Leftarrow ו: ל $Ax = b$ אין פתרון לכן ב A יש שורת אפסים לכן למערכת $Ax = 0$ יש אינסוף פתרונות.

ו \Leftarrow א: ל $Ax = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי לכן יש ב A שורת אפסים לכן A לא הפיכה.

שאלה 5

$$\text{יהיו } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ מעל } \mathbb{R}.$$

- א. דרג את המטריצה המצומצמת A ואת המורחבת $(A|b)$
- ב. מהם $rank(A), rank(A|b)$? האם למערכת $Ax=b$ יש פתרון?
- ג. מהו מימד מרחב הפתרונות של המערכת $Ax=0$?
- ד. מצא בסיס ל $Null(A)$
- ה. מצא פתרון כללי למערכת $Ax=b$.

פתרון שאלה 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & -2 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & -2 \\ 13 & 14 & 15 & 16 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - 5R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 9R_1 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 13R_1 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & 8 \\ 0 & -8 & -16 & -24 & 16 \\ 0 & -12 & -24 & -36 & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 - 3R_2 \rightarrow R_4 \\ -\frac{1}{4}R_2 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- א. $rank(A|b) = rank(A) = 2$ למערכת $Ax=b$ יש אינסוף פתרונות.
- ב. לפי משפט שלמדנו $\dim(Null(A)) = 2 \Leftarrow n = rank(A) + \dim(Null(A))$.
- ג. $\dim(Null(A)) = 2 \Leftarrow n = rank(A) + \dim(Null(A))$.
- ד.

$$x_4 = s, x_3 = t, x_2 = -3s - 2t, x_1 = 2s + t$$

$$\text{בסיס ל } Null(A) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow (2s+t, -3s-2t, t, s) = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ ה. נמצא פתרון פרטי ללא הומוגנית:}$$

פתרון כללי של הלא הומוגנית הוא פתרון כללי של הומוגנית + פתרון פרטי של הלא הומוגנית:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t+2s \\ -1-2t-3s \\ 1+t \\ -1+s \end{pmatrix}$$

שאלה 6

א. חשב את הדטרמיננטה של $\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל \mathbb{C} .

ב. יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ שלא כולם שווים ל 0. הוכח שהמטריצה $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$ הפיכה.

פתרון שאלה 6

א. $\det = -2$.

ב. $\det = -(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \neq 0$ לכן המטריצה הפיכה

שאלה 7

א. הוכח כי לכל $A \in F^{n \times n}$ ו $\alpha \in F$ מתקיים $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

ב. יהי $n \in \mathbb{N}$ אי-זוגי ותהיי $A \in F^{n \times n}$ אנטי סימטרית. הוכח שאם $\text{char}(F) \neq 2$ אזי מתקיים

$\det(A) = 0$ לכל A . הסבר מדוע זה לא נכון כאשר $\text{char}(F) = 2$.

פתרון שאלה 7

א. מתכונות הדטרמיננטה שאם מכפלים שורה בסקלר α אזי $\det \rightarrow \alpha \det$. זה להכפיל את כל n השורות ב α לכן הדטרמיננטה מוכפלת n פעמים ב α סה"כ $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

ב.

$$|A| = |A^t|, |-A| = (-1)^n |A|$$

$$\Rightarrow |A| = |A^t| = |-A| = -1|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

אם $\text{char}(F) = 2$ אזי $2_F = 0$ ולכן המשוואה תתקיים עבור כל $|A|$

שאלה 8

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

פתרון שאלה 8

נבצע על העמודות את הפעולות האלמנטריות הבאות: $C_1 \leftrightarrow C_n, C_2 \leftrightarrow C_{n-1}, C_3 \leftrightarrow C_{n-2}, \dots$

כל חילוף מכפיל את הדטרמיננטה ב -1 .

נקבל את המטריצה - מטריצת היחידה בגודל n -
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \begin{cases} 1 & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ even} \\ -1 & \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \text{ odd} \end{cases}$$