# הוכיחו/הפריכו:

1) אם $f(x),g(x)$ פו' ממשיות הגזירות בנק' $x_0$ כך ש- $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a$, אז $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=a$.
**פתרון:** הפרכה: $f(x)=x, g(x)=x+1$ בנק' $x_0=1$.

2) אם $f(x)$ פו' ממשית הגזירה בנק' $x_0$, וקיים (וסופי) הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$ אז הוא שווה ל- $f(x_0)$.
**פתרון:** הוכחה: $f(x)$ גזירה ב- $x_0$ לכן רציפה ב- $x_0$ לכן קיים (וסופי) הגבול הנתון וגם שווה ל- $f(x_0)$.

3) תהי $f(x)$ פו' ממשית הגזירה ב- $(a,b)$ ויהיו $c<d\in(a,b)$. אז קיימת $p\in[c,d]$ כך ש- $f'(p)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$.
**פתרון:** הוכחה: $f(x)$ גזירה ב- $(a,b)$ בפרט גזירה ב- $(c,d)$. כמו כן בפרט רציפה ב- $(a,b)$ לכן רציפה ב- $[c,d]$. לכן המסקנה נובעת ממשפט לגרנז'.

4) תהי $f(x)$ פו' ממשית הגזירה ב- $(a,b)$, ותהי $x_0\in(a,b)$ כך ש- $f''(x_0)=0$. אזי $x_0$ איננה נקודת קיצון של $f(x)$.
**פתרון:** הפרכה: $f(x)=x^4$ בנק' $x_0=0$.

5) תהי $f(x)$ פו' ממשית המוגדרת ורציפה בקטע $(a,b)$. אזי לכל קטע $[c,d]\subseteq(a,b)$ יש ל- $f(x)$ מקסימום מוחלט ב- $[c,d]$.
**פתרון:** הוכחה: $f(x)$ רציפה ב- $[c,d]$, וזהו קטע סגור וחסום, לכן מקבלים את הדרוש לפי משפט ווירשטרס.

6) אם $f(x)$ פו' ממשית המוגדרת ב- $[a,b]$ וגזירה ב- $(a,b)$ אז יש $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
**פתרון:** הפרכה: הפו' המפוצלת $f(x)$ בקטע $[0,1]$ שמוגדרת להיות $f(x)=x$ לכל $x\in(0,1)$ ו- $f(0)=f(1)=21$. אז $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ אך אין אף נקודה בפנים הקטע בה הנגזרת $0$, כי הנגזרת היא זהותית $1$.

7) אם $f(x)$ פו' ממשית המוגדרת ב- $(a,b)$ וחסומה שם אז לכל $x_0\in(a,b)$ קיים (וסופי) הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$.
**פתרון:** הפרכה: $f(x)=\lfloor x\rfloor$ בקטע $(-1,1)$ עם הנקודה $x_0=0$.

8) אם $\epsilon,\delta$ מספרים אינפיניטסימליים חיוביים אז $\epsilon^\delta$ מספר אינפיניטסימלי חיובי.
**פתרון:** הפרכה: נסתכל על $f(x)=x^x$. לפי הטריק של $e^{\ln\cdot\cdot}$ ולופיטל נקבל כי $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$, כלומר לכל $\epsilon$ אינפי' חיובי מתקיים $st(\epsilon^\epsilon)=1$.