

תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים

89-214 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.

שאלות להגשה

שאלה 1. נגדיר את המֶרְכֵז של חבורה G להיות

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

דהיינו זהו האוסף של כל האיברים ב- G שמתחלפים עם כל איברי G .

א. הוכיחו כי לכל חבורה G מתקיים $Z(G) \leq G$ (כלומר שהמרכז של חבורה הינו תת חבורה).

ב. מצאו את $Z(S_3)$ ואת $Z(GL_2(\mathbb{R}))$, ואת האינדקסים שלהם בתוך S_3 ובתוך $GL_2(\mathbb{R})$ בהתאמה.

שאלה 2. תהי $Q_8 = \{1, -1, i, j, k, -i, -j, -k\}$ חבורה עם פעולת כפל המוגדרת ע"י:
 $ijk = k^2 = j^2 = i^2 = -1$ חבורה זו נקראת חבורת הקוטרניונים. נא לשים לב שבמרומו משמות האיברים מתקיים ש- $i \cdot i = -1$, $i \cdot j = -i \cdot j$ וכדומה.

א. השלימו את "לוח הכפל" של Q_8 . כלומר, לכל שני איברים $a, b \in Q_8$ רשמו למה שווה ab .

ב. מצאו את $Z(Q_8)$.

ג. מה האינדקס של $Z(Q_8)$ בתוך Q_8 ?

שאלה 3. יהי $f : G \rightarrow H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז f תת-חבורה אבלית.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $G \cong H$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

ג. הוכיחו או הפריכו: קיים מונומורפיזם $\varphi : S_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$.

שאלה 4. תהיינה G, H חבורות ויהי $f : G \rightarrow H$ הומומורפיזם. הוכיחו: f חח"ע אם ורק אם $\ker f = \{e_G\}$.

שאלה 5. תהי G חבורה. נגדיר $f : G \rightarrow G$ ע"י: $f(g) = g^2$.

1. הוכיחו שהפונקציה f היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

2. נניח שהחבורה G אבלית וסופית. הוכיחו שהפונקציה f היא איזומורפיזם אם ורק אם הסדר של G הוא אי-זוגי.

שאלת רשות

השאלה איננה שאלת בונוס. אין צורך לענות עליה ולא יינתן עליה ניקוד.

שאלה 6. צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תן דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב- n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.

רמזים וספוילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.