נכתב על ידי יהונתן רגב

משוואת לג׳נדר

תזכורת

משוואה מהצורה:

$$\boxed{(1-x^2)y''-2xy'+k(k+1) \quad = \quad 0 \quad , \quad k\in\mathbb{Z}}$$

קיים פתרון שהוא פולינום מדרגה k, נסמנו $\mathcal{P}_k$ (הדרגה זוגית עבור $k\in 2\mathbb{Z}$ ואי זוגית עבור $k\in 2\mathbb{Z}+1$).

נוסחת רודריג ($\mathcal{Rodrigues}$)

$$\mathcal{P}_k(x) \quad = \quad \frac{1}{2^k k!}\cdot\frac{d^k}{dx^k}\left[(x^2-1)^k\right]$$

פונקציה יוצרת

$$G(x,t) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{P}_k(x)\cdot t^k$$

הוכחה (נוסחת רודריג)

$$\begin{aligned}(x^2-1)\cdot\frac{d}{dx}\left[(x^2-1)^k\right] \quad &= \quad (x^2-1)\cdot k(x^2-1)^{k-1}\cdot 2x \\ &= \quad 2xk(x^2-1)^k\end{aligned}$$

אם נגזור את שני האגפים $(k+1)$ פעמים, נקבל כי $\mathcal{P}_k$ פותר את משוואת לג׳נדר (**תרגיל:** בדוק!).

הוכחה (פונקציה יוצרת)

הוכחה בעזרת מניפולציות עם נגזרות חלקיות של $G^2(x,t)$.

הערה

נגזור את הפונקציה היוצרת $G(x,t)$ לפי t ולפי x, ונקבל יחסי רקורסיה בין $\mathcal{P}_n,\mathcal{P}_{n+1}\mathcal{P}_{n+2}$ ובין $\mathcal{P}_{n-1},\mathcal{P}_{n+1},\mathcal{P}_n'$.

הערה

$$\mathcal{P}_n(\cos(\vartheta)) \quad = \quad J_0(n\vartheta)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

נכתב על ידי יהונתן רגב

הצגה אינטגרלית

$$\mathcal{P}_n(\cos(\vartheta)) \quad = \quad \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} (\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)\cos(\vartheta))^n \; d\vartheta$$

■