אינפי 3 תרגיל 5

חלק I

נגזרות חלקיות ודיפרנציאביליות

1. חשבו את הנגזרת החלקית לפי המשתנה y בנקודה (0,2014) של הפונקציה:

$$f(x,y)=sin(xy)cos(x+y)e^{tan(y^y)}$$

2. בדקו האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות בנקודות הנתונות:

(א) $f(x,y)=\sqrt[5]{x^7y^3}$ בנקודה $(0,0)$.

(ב) $f(x,y)=ln(x^4+y^6+1)$ בנקודה $(2,3)$.

3. יהיה מרחב המכפלה הפנימית $l^2=\{(a_n)_{n=1}^{\infty}|\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty\}$ עם המכפלה הפנימית $\langle(a_n)_{n=1}^{\infty},(b_n)_{n=1}^{\infty}\rangle=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot b_n)$.

(א) תהי הפונקציה $f:l^2\to\mathbb{R}$ $f:((a_n)_{n=1}^{\infty})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^n$. האם f רציפה ב $\bar{0}=(0)_{n=1}^{\infty}$?

(ב) לכל n נגדיר $e_n=(0,0,...,0,1,0,0,....)$ הסדרה שהאיבר ה- n שלה הוא 1 וכל איבר אחר שלה הוא 0. חשבו את הגבול $f_n'(\bar{0})=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h\cdot e_n)-f(\bar{0})}{h}$

(ג) תהי הסדרה $v=(f_1'(\bar{0}),f_2'(\bar{0}),f_3'(\bar{0}),....)$ עבור אותם f_n' שחישבצם בסעיף ג. האם היא ב- l^2?

(ד) הביטוי בפונקציה $\phi((a_n)_{n=1}^{\infty})=f((a_n)_{n=1}^{\infty})-f(\bar{0})-\langle v,(a_n)_{n=1}^{\infty}\rangle$ האם מתקיים $\lim\limits_{(a_n)_{n=1}^{\infty}\to0}\dfrac{\phi((a_n)_{n=1}^{\infty})}{\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|}=0$

4. יהי $f(x,y):=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

(א) הוכיחו שלכל וקטור יחידה $u=\langle u_1,u_2\rangle$ מתקיים

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=0.$$

(ב) הראה ש f אינה רציפה ולכן אינה דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

5. תהי g פונקציה ממשית במשתנה אחד, גזירה ב $a\neq 0$. יהי $x_0\in\mathbb{R}^k$ והגדר $f(x):=g(\|x\|)$ בסביבה של x_0.

(א) הוכיחו שלכל וקטור יחידה u מתקיים:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)=\left\langle\frac{g'(a)}{a}x_0,u\right\rangle$$

(ב) הוכיחו שמתקיים

$$\max_u\left|\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)\right|=|g'(a)|.$$

עבור אילו u מתקבל המקסימום?

6. הוכח/הפרך: יהי $U\subseteq\mathbb{R}^k$, תהי $f:U\to\mathbb{R}$ רציפה ב $a\in U$ כך שקיימות הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ בסביבה של a. אזי f דיפרנציאבילית a.

7. הוכח/הפרך: יהי $U\subseteq\mathbb{R}^k$, תהי $f:U\to\mathbb{R}$ רציפה ב $a\in U$ כך שקיימות הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ בסביבה של a, ועבור $2\leq i\leq m$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ רציפות בסביבה של a. אזי f דיפרנציאבילית a.

8. הוכח/הפרך: יהי $U\subseteq\mathbb{R}^k$, תהי $f:U\to\mathbb{R}$ רציפה ב $a\in U$ כך שקיימות הנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ בסביבה של a, וקיים j $1\leq j\leq m$, כך ש $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ רציפות בסביבה של a. אזי f דיפרנציאבילית a.

9. חשבו את הנגזרת של הפונקציה $f(x,y)$ בכיוון הוקטור h בנקודה a.

$$f(x,y)=xsin(x+y),h=(-1,0),a=(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}).$$

10. נתונה הפונקציה $f(x,y) = \sqrt[3]{xy^2}$.

(א) חשבו את הנגזרת הכיוונית בראשית הצירים בכיוון הוקטור היוצר זווית αעם הכיוון החיובי של ציר ה - x.

(ב) עבור איזו זווית α הנגזרת הכיוונית תהיה מקסימלית?

חלק II

דיפרנציאל מסדר גבוה וכלל טיילור

1. כתבו את פולינום הטיילור של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ **מסביב לנקודה** $(2,2)$**, עד סדר** 2.

(ב) $f(x,y) = e^{2x}ln(y+1)$ **מסביב לנקודה** $(0,0)$ **עד סדר** 4.

חלק III

מינימום ומקסימום

2. מצאו את הנקודות החשודות (הקריטיות) של הפונקציות הבאות וסווגו אותן (מינימום, מקסימום, אוכף):

(א) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$.

(ב) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$.

(ג) $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$.

3. הוכח שמטריצה ריבועית היא מוגדרת חיובית אם ורק אם כל הע"ע שלה הם חיוביים.

4. יהי $f(x,y) = \left(y - x^2\right)\left(y - 3x^2\right)$.

(א) הוכיחו שלכל קו ישר $g(t) = (ta, tb)$ עבור t ממשי ו (a, b) קבוע, הפונקציה $f \circ g$ מקבלת מינימום מקומי ב0.

(ב) הוכיחו ש $(0, 0)$ היא נקודה קריטית של f אבל אינה נק' מינימום.