## 88201 - תרגיל 4

1. נתונה עקומה $\gamma:[0,2\pi]\to R^2$ המוגדרת ע"י הפרמטרזציה $\gamma(t)=(2\cos t,3\sin t)$
   - א. שרטט עקומה זו במערכת צירים
   - ב. מצא משוואה ריבועית $F(x,y)=0$ שמגדירה עקומה זו.
   - ג. חשב את עקמומיות העקומה. הבע את העקמומיות כפונקציה של $x$. (היעזר בנוסחת Bateman)
   - ד. מצא את הנקודות על העקומה בהן עקמומיות מקסימאלית ועקמומיות מינימאלית. מהי עקמומיות זו? מהו רדיוס העקמומיות בנקודות אלו?
2. תהי $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(2+x^2\right)^3}$, מצאו פרמטריזציית אורך קשת לגרף של פונקצייה זו.
3. הוכיחו כי לעקומה $\gamma(t)$ יש מהירות קבועה אם ורק אם $\gamma'$ מאונך ל $\gamma''$. רמז: גזרו את התבוננו בנגזרת לפי $t$ של מכפלה פנימית מסויימת.
4. חשב את עקמומיות העקומה $\gamma$ המוגדרת ע"י המשוואה (היעזר בנוסחת Bateman)
   - א. $x^2+y^2+4y+1=2x$
   - ב. $ax^2+by^2=1$
5. חשבו את העקמומיות של העקומות באות:
   - א. $\gamma(t)=(t,\cosh t)$.
   - ב. $\gamma(t)=\left(\cos^2 t,\sin^2 t\right)$.
6. חקרו את העקומה $\gamma(t)=\left(\cos t,\frac{1}{2}\sin 2t\right),\quad 0\le t\le 2\pi$.
   - א. ציירו אותה.
   - ב. חשבו את המשיק והנורמל בכל נקודה.
   - ג. האם העקומה במהירות יחידה?
7. נתונה עקומה $\gamma$ בפרמטר טבעי $s$, תארו כיצד משפיעות העתקות הבאות על העקמומיות של $\gamma$ (כלומר מצאו את העקמומיות של העקומה המתקבלת לאחר ביצוע הפעולה).
   - א. החלפת האוריינטציה במישור: $T(x_1,x_2)=(x_1,-x_2)$, העקומה המתקבלת היא $\beta(s)=T\circ\gamma(s)$.
   - ב. היפוך כיוון התנועה של העקומה: $\beta(s)=\gamma(-s)$.
   - ג. הזזת הפרמטר הטבעי: $\beta(s)=\gamma(s+s_0)$.
8. נגדיר את ההטלה הסטריאוגרפית של הספירה $A=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=r^2\right\}$ ב $\mathbb{R}^3$ על המישור. זו פונקציה $f$ המעתיקה כל נקודה ב $A$ פרט לקוטב הצפוני $N=(0,0,r)$ אל המישור $z=0$ בצורה הבאה: תהי $p\in A\setminus\{N\}$, $f(p)$ היא נקודת החיתוך של הישר העובר דרך $N$ ו $p$ עם המישור $z=0$.
   - א. מצאו נוסחאות מפורשות ל $f$ ול $f^{-1}$.
   - ב. כעת, שימו לב ש $f^{-1}$ היא פרמטריזציה של הספירה, לבד מהקוטב הצפוני. מצאו בצורה מפורשת את התבנית היסודית הראשונה של פרמטריזציה זו