תרגיל 10 מבוא לתורת החבורות

שאלה 9.1 תהי G חבורה ותהי $N \lhd G$ תת חבורה נורמלית. נתון כי $G/N \simeq S_3$. ציירו את דיאגרמת תתי החבורות בין G ל N. עבור כל חבורה H ציינו:

1. האם H נורמלית?
2. מהו $[G:H]$?
3. מהו $[H:N]$?

פתרון: צריך להבין את דיאגרמת תתי החבורות של S_3. יש ל S_3 4 תתי חבורות לא טריוויאליות

$$K_1 = \langle (12) \rangle, \quad K_2 = \langle (13) \rangle, \quad K_3 = \langle (23) \rangle, \quad K_4 = \langle (123) \rangle$$

כולן מכילות את $\{e\}$ ומוכלות ב S_3 כמובן אבל אף אחת מהן לא מוכלת באחרת.

הדיאגרמה של תתי החבורות בין G ל N זהה (לפי משפט ההתאמה). נגיד יש ארבע חבורות $H_1, \ldots, H_4$ כך ש

$$H_i/N = K_i$$

בתוך S_3 רק K_4 נורמלית ולכן לפי משפט ההתאמה רק H_4 נורמלית ב G.

בנוסף

$$[G:H_1] = [S_3:K_1] = 3$$

ואותו דבר קורה עם H_2, H_3 ואילו

$$[G:H_4] = [S_3:K_4] = 2$$

עכשיו,

$$[H_1:N] = [K_1:\{e\}] = |K_1| = 2$$

ואותו דבר קורה עם H_2, H_3 ואילו

$$[H_4:N] = [K_4:\{e\}] = |K_4| = 3$$

שאלה 9.2 ניתן כאן כמה סימונים לחבורות: נסמן ב U_n את החבורה של כל המטריצות המשולשיות עליונות והפיכות.

N_1 תהיה תת החבורה של מטריצות $\{A \in U_n \mid |A| = 1\}$.
N_2 תהיה תת החבורה של מטריצות שכל האלכסון שלהם הוא 1.
D_n תהיה תת החבורה של המטריצות האלכסוניות.
נסתכל גם על החבורה $D_n \cap N_1$ של מטריצות אלכסוניות עם דטרמיננטה 1.
(מומלץ לצייר את הדיאגרמה כמו שעשינו בכיתה)

1. קבעו עבור כל אחת מתתי החבורות האם היא נורמלית ב U_n (והוכיחו)
פתרון: N_1 נורמלית. כי היא הגרעין של ההומומורפיזם $\det : U_n \to \mathbb{R}^*$ השולח כל מטריצה לדטרמיננטה שלה. N_2 נורמלית כפי שראינו בתרגול כי היא הגרעין של הפונקציה

$$f : U_n \to D_n$$

שולח כל מטריצה לאלכסון שלה.

D_n היא לא חבורה נורמלית ב U_n. למשל ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ו $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in D_n$ אז

$$\begin{aligned} A^{-1}DA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \notin D_n \end{aligned}$$

הדוגמא הזאת גם מראה ש $D_n \cap N_1$ לא נורמלית כי $D \notin D_n \cap N_1$.

2. הראו כי $D_n \cap N_1$ נורמלית ב D_n.
פתרון: זה למעשה מקרה פרטי של טענה יותר כללית. אם N תת חבורה נורמלית ו H תת חבורה כלשהיא. אז כבר ראיתם בהרצאה ש $N \cap H \lhd H$. הסיבה לכך היא שאם $x \in N \cap H$ ו $h \in H$ אז

בוודאי

$$hxh^{-1} \in H$$

ובגלל ש N נורמלית אז

$$hxh^{-1} \in N$$

ולכן

$$hxh^{-1} \in H \cap N$$

מש"ל

3. הוכיחו כי

$$D_n / D_n \cap N_1 \simeq (U_n/N_2)/(N_1/N_2)$$

פתרון: לפי משפט האיזומורפיזם השלישי

$$(U_n/N_2)/(N_1/N_2) \cong U_n/N_1$$

אם נוכיח ש $D_nN_1 = U_n$ אז לפי משפט האיזומורפיזם השני

$$U_n/N_1 \cong D_n/D_n \cap N_1$$

אז למה באמת $D_nN_1 = U_n$? ניקח $A \in U_n$ ונכתוב את המטריצה בשורות

$$A = \begin{pmatrix} - & R_1(A) & - \\ - & R_2(A) & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(A) & - \end{pmatrix}$$

אז

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \frac{1}{A_{1,1}}R_1(A) & - \\ - & \frac{1}{A_{2,2}}R_2(A) & - \\ & \vdots & \\ - & \frac{1}{A_{n,n}}R_n(A) & - \end{pmatrix}$$

בגלל ש A מלכתחילה משולשית עליונה גם המטריצה הימננית משולשית עליונה וברור שהאלכסון שלה הוא מכיל רק אחדים ולכן המטריצה הימנית כאן היא ב N_1 כנדרש.

שאלה 9.3 נגדיר חבורה שנקראת חבורת הקוואטרניונים ומסומנת Q_8. זאת חבורה מסדר 8 שהאיברים שלה הם:

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

הכפל מוגדר לפי

$$i^2 = j^2 = k^2 == -1$$

$$\begin{aligned} i \cdot j &= k \\ j \cdot i &= -k \\ i \cdot k &= -j \\ k \cdot i &= j \\ j \cdot k &= i \\ k \cdot j &= -i \end{aligned}$$

הכפל עם מינוס מתנהג כמו שמצפים. (יש טבלת כפל מלאה בוויקיפדיה בערך "חבורת הקוואטרניונים" אם מישהו צריך).

1. ציירו את דיאגרמת Hasseשל תתי חבורות. בכל תת חבורה ציינו איזה איברים נמצאים בה.
פתרון: חוץ מ Q_8 ו $\{e\}$ יש עוד 4 תתי חבורות

$$N_1 = \{\pm 1, \pm i\}$$
$$N_2 = \{\pm 1, \pm j\}$$
$$N_3 = \{\pm 1, \pm k\}$$
$$N_4 = \{\pm 1\}$$

לפי ההכלה אפשר להבין איך נראית הדיאגרמת Hasse.

2. קבעו עבור כל תת חבורה אם היא נורמלית ב Q_8.
פתרון: N_1, N_2, N_3 כמובן נורמליות כי הן מאינדקס 2 אבל גם $\{\pm 1\}$ נורמלית כי אלה איברים שמתחלפים עם כל איבר אחר אז ברור ש

$$g\{\pm 1\} = \{\pm 1\}g$$

לכל $g \in Q_8$.

3. תהי N תת חבורה נורמלית מסדר 2 של Q_8 (כפי שמצאתם בסעיפים הקודמים, יש רק אחת כזאת). חבורת המנה Q_8/N היא חבורה מסדר 4 ולכן איזומורפית ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ או ל $\mathbb{Z}_4$. לאיזה מהם? כתבו איזומורפיזם מפורש, כלומר כתבו עבור כל קוסט לאן הוא נשלח.
פתרון: לפי הדיאגרמה שראינו בסעיפים הקודמים ולפי משפט ההתאמה, ל Q_8/N_4 יש 3 חבורות לא טריויאליות. לכן

$$Q_8/N_4 \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

כי גם ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ יש 3 תתי חבורות לא טריויאליות בעוד ל $\mathbb{Z}_4$ יש רק אחת. נתאר איזומורפיזם מפורש. הקוסטים של הם בעצם

$$\{\pm 1\}\{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$$

למעשה אפשר לשלוח אותם ל $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ כמעט איך שרוצים. אפשר להגדיר

$$f(\{\pm 1\}) = (0,0)$$

$$f(\{\pm i\}) = (1,0)$$

$$f(\{\pm j\}) = (0,1)$$

$$f(\{\pm k\}) = (1,1)$$

שאלה 9.4 יהיו $H, N \leq G$ תתי חבורות כך ש N נורמלית. הוכיחו כי

$$|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|}$$

הערה: הטענה הזאת נכונה גם בלי ההנחה של נורמליות אבל ההוכחה קצת יותר קשה.
פתרון: לפי משפט האיזומורפיזם השני

$$HN/N \simeq H/H \cap N$$

ולכן

$$\frac{|HN|}{|N|} = |HN/N| = |H/H \cap N| = \frac{|H|}{|H \cap N|}$$

ולכן

$$|HN| = \frac{|H||N|}{|H \cap N|}$$

כנדרש.