אינפי 3

תרגול 4

תזכורת:

הגרדיאנט הוא וקטור הנגזרות:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה. נאמר שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$

אם אפשר לכתוב:

$$f(x_1^0+\Delta x_1,...,x_n^0+\Delta x_n)=f(x^0)+\sum_{i=1}^{n}(A_i+\alpha_i(x))\Delta x_i$$

כאשר $A_1,...,A_n$ קבועים ו־$\alpha_1,...,\alpha_n$ הן פונקציות ששואפות ל־0 כאשר Δx שואף ל־0.

כלומר, בסביבת x^0 אפשר להציג את הפונקציה בקירוב טוב כפונקציה ליניארית.

אם פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה אז היא רציפה שם, והקבועים A_i הם הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$$

תנאי מספיק לדיפרנציאביליות: הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות. תנאי זה לא הכרחי

תרגילים:

1. הפונקציה:

$$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נבדוק האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

אם נתבונן במסלול $x=y$ נקבל:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f\left(x,x\right)=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x^2}{2x^2}=1\neq 0$$

כלומר, הפונקציה אינה רציפה ב-(0,0) ולכן בוודאי שאינה דיפרנציאבילית

2. הפונקציה:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$$

נבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $(0,0,0)$:

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,0,0)}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}=$$

נציב $t=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ונקבל:

$$=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}=0=f(0,0,0)$$

ולכן הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0,0)$; את הגבול אפשר לחשב בעזרת לופיטל. נחשב את הנגזרות החלקיות בנקודה:

$$f_x(0,0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0,0)-f(0,0,0)}{t}=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{\sqrt{t^2}}}=0$$

באופן דומה קל לראות ש־$f_y(0,0,0) = f_z(0,0,0) = 0$.

כעת, על מנת שהפונקציה תהיה דיפרנציאבילית צריך להתקיים:

$$f(h_1,h_2,h_3) - f(0,0,0) = f_x(0,0,0)\,h_1 + f_y(0,0,0)\,h_2 + f_z(0,0,0)\,h_3 + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}\right)$$

כלומר נבדוק האם:

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\longrightarrow(0,0,0)} \frac{1}{\left(h_1^2+h_2^2+h_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}} = 0$$

ואכן, אם נציב $t = \sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$ נקבל:

$$= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{1}{t^3} e^{-\frac{1}{t}} = 0$$

ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0,0)$.

3. דוגמא לכך שרציפות הנגזרות החלקיות היא תנאי מספיק אך לא הכרחי:

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

לפי מה שלמדנו, ניתן לבדוק שהפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

בקצרה, הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$ הן 0. לכן, כדי להוכיח דיפרנציאביליות בנקודה

יש להוכיח:

$$\lim_{(h_1,h_2)\longrightarrow(0,0)} \frac{\left(h_1^2+h_2^2\right)\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

וזה אכן מתקיים.

אלא שהנגזרות בנקודה אינן רציפות; למשל אם נגזור לפי x נקבל במסלול $y=0$

$$f_x\left(x,0\right)=2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

שכלל אינה חסומה כאשר $x\to 0$ ולכן לא רציפה.

4. דוגמה לכך שקיום הנגזרות החלקיות הוא לא תנאי מספיק לדיפרנציאביליות:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

הפונקציה אינה רציפה ב$-(0,0)$(אפשר להתבונן במסלולים מהצורה $y=kx$ ולקבל גבולות שונים) ולכן בוודאי שאינה דיפרנציאבילית.

אף על פי כן, הנגזרות החלקיות קיימות:

$$f_x(0,0)=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$$

וכך גם $f_y(0,0)$.

נגזרת כיוונית:

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה, נגדיר את הנגזרת הכיוונית של f בכיוון h בנקודה a להיות:

$$D_hf(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית, מתקיים:

$$D_hf(a)=\nabla f(a)\cdot h$$

*הנגזרת הכיוונית בכיוון הגרדיאנט (המנורמל) היא המקסימלית.

כלומר, בכיוון זה הפונקציה עולה בקצב הגדול ביותר.

5. בנקודה $a=(1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה

$$f(x,y,z)=x\arctan(yz)$$

עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו וקטור זה ע"י וקטור שאורכו 1.

כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון זה.

<u>פתרון:</u>

הנגזרות החלקיות של f הן:

$$f_x=\arctan(yz)$$

$$f_y=\frac{xz}{1+(yz)^2}$$

$$f_z=\frac{yx}{1+(yz)^2}$$

הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בלכ נקודה ולכן f דיפרנציאבילית.

כעת, כיוון העלייה המקסימלי הוא כיוון הגרדיאנט המנורמל. הגרדיאנט הוא:

$$\nabla f\left(1,1,1\right)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

ולכן וקטור הכיוון של העלייה המקסימלית מאורך 1 יהיה:

$$h=\frac{\nabla f\left(1,1,1\right)}{\left\|\nabla f\left(1,1,1\right)\right\|}=\left(0.743,0.473,0.473\right)$$

ומכיוון שהפונקציה דיפרנציאבילית, הנגזרת הכיוונית בכיוון זה תהיה:

$$D_{h}f\left(a\right)=\nabla f\left(1,1,1\right)\cdot h=1.056$$

6.א. חשבו את הנגזרת של f בנקודה a לפי הווקטור h
בפונקציה $f(x,y,z)=xy^2z^3$. יהיו $h=(4,3,0)$ ו־$a=(3,2,1)$.

<u>פתרון:</u>

הנגזרת בכיוון הוקטור h שווה ל:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+th)-f(a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(3+4t)(2+3t)^2-3\cdot 2^2}{t}=\lim_{t\to 0}(52+36t^2+51t)=52$$

6.ב. חשבו את הנגזרת בכיוון הוקטור h לפי וקטור מאורך 1.

ננרמל את הוקטור h:

$$\frac{h}{||h||} = \frac{1}{5}(4,3,0)$$

והנגזרת הכיוונית תהיה:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\frac{h}{||h||})-f(a)}{t} = \frac{52}{5}$$

לכן $\nabla f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) = (1,0)$. $h = (-1,0)$ ולכן:

$$D_h f\left(a\right) = (1,0)\cdot(-1,0) = -1$$

7. חשבו את הנגזרות של f בכיוון הוקטור h בנקודה a.

$f(x,y) = x\sin(x+y)$, $h = (-1,0)$, $a = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

הפונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}^2$. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x(x,y) = \sin(x+y) + x\cos(x+y)$$

$$f_y(x,y) = x\cos(x+y)$$

הנגזרות החלקיות רציפות ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית. אם כך:

$$D_h f(a) = \nabla f(a) \cdot h$$

במקרה שלנו:

$$f_x\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = 1, f_y\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

החלפת סדר הגזירה:

תהא f פונקציה רציפה בסביבה D של הנקודה x^0 ב־$\mathbb{R}^k$, $k \geq 2$.

נניח שעבור שני אינדקסים i, j הנגזרת $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ קיימת ב־D ורציפה ב־x^0, אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0)$$

כלומר ניתן להחליף את סדר הגזירה.

ניתן דוגמה לפונקציה שנגזרותיה אינן מתחלפות. נתבונן בפונקציה:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

נגזור לפי ההגדרה:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}$$

וכעת:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,0)=\lim_{r\to 0}\frac{f(t,r)-f(t,0)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{tr\frac{t^2-r^2}{t^2+r^2}-0}{r}=t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t-0}{t}=1$$

מצד שני,

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t}$$

שוב, נחשב כל אחד מהביטויים במונה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,t) = \lim_{r\to 0}\frac{f(r,t) - f(0,t)}{r} = -t$$

ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{-t-0}{t} = -1$$

ואכן אם נגזור לפי x ואז לפי y נקבל תוצאה אחרת מאשר אם נגזור לפי y ואז נגזור לפי x. חשבו איזה תנאי לא מתקיים כאן.