נכתב על ידי יהונתן רגב

נוסחת טיילור

למה

יהי $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ פולינום ממשי. אזי, לכל $k = 0, \cdots, n$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

הוכחה

$$\frac{f^{(0)}(0)}{0!} = f^{(0)}(0) = f(0) = a_0$$

$$f^{(1)}(x) = a_1 + 2 \cdot a_2 \cdot x + \cdots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

$$\frac{f^{(1)}}{1!} = f^{(1)}(0) = a_1$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot x + \cdots + n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot x^{n-2}$$

$$f^{(2)}(0) = 2 \cdot a_2$$

$$a_2 = \frac{f^{(2)}(0)}{2} = \frac{f^{(2)}(0)}{2!}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n$$

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

■

יהי x_0. נציב $x = x_0 + h$ $(h = x - x_0)$ בפולינום שבלמה:

$$f(x_0 + h) = a_0 + a_1 \cdot (x_0 + h) + \cdots + a_n \cdot (x_0 + h)^n$$

נפתח את הסוגריים ונקבל פולינום:

$$f(x) = f(x_0 + h) = g(h) = g(x - x_0) = b_0 + b_1 \cdot h + \cdots + b_n \cdot h^n$$

נכתב על ידי יהונתן רגב

בפרט, ניתן להציג כל פולינום ב – x כפולינום ב - $x - x_0$, כאשר x_0 קבוע כרצוננו.

מהלמה, עבור $g(h)$ (פולינום ב - h), לכל $i = 0,1 \cdots n$:

$$b_i = \frac{g^{(i)}(0)}{i!}$$

באופן כללי, אם $g(h) = f(x_0 + h)$, $h = x - x_0$ פונקציה של x, לכן עפ"י כלל השרשרת :

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dh} \cdot \overbrace{\frac{dh}{dx}}^{=(x-x_0)'=1} = \frac{dg}{dh}$$

לכן :

$$b_i = \frac{g^{(i)}}{i!}_{|h=0} = \frac{g^{(i)}}{i!}_{|x=x_0} = \frac{g^{(i)}(x_0)}{i!}$$

מסקנה

יהיו $f(x)$ פולינום ממעלה n, x_0 קבוע. אזי :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

דוגמה

יהי $f(x) = 1 + x^3$. כתוב f את בצורה :

$$f(x) = b_0 + b_1 \cdot (x - 1) + b_2 \cdot (x - 1)^2 + b_3 \cdot (x - 1)^3$$

כאן : $x_0 = 1$.

$$b_0 = f(1) = 2$$

$$b_1 = \frac{f'(1)}{1!} = 3$$

$$b_2 = \frac{f''(1)}{2!} = 3$$

$$b_3 = \frac{f'''(1)}{3!} = 1$$

לכן :

$$f(x)=2+3\cdot(x-1)+3\cdot(x-1)^2+(x-1)^3$$

הערה

להצגה של הפולינום במסקנה הנ״ל קוראים **פיתוח טיילור** (ואם $x_0=0$: **פיתוח מקלורן**) של הפולינום $f(x)$ סביב הנקודה x_0.

פיתוח טיילור לפונקציה כלשהי

תהי $f(x)$ פונקציה עם נגזרת $f^{(n)}$ קיימת לכל n.

מוטיבציה

נניח שניתן לגזור כפי שאנו רגילים.

<u>המטרה</u> - לכתוב את f בצורה:

$$f(x)=a_0+a_1\cdot(x-x_0)+a_2\cdot(x-x_0)^2+a_3\cdot(x-x_0)^3+\cdots$$

(סכום אינסופי) כאשר: $x\approx x_0$.

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}=a_k$$

הוכחה דומה להוכחת הלמה הקודמת.

אם $|x-x_0|$ ״קטן״, אז: $(x-x_0)^n\to 0$ ״מהר״, לכן יש סיכוי ש:

$$f(x)=a_0+\cdots+a_n\cdot(x-x_0)^n+\overbrace{a_{n+1}\cdot(x-x_0)^{n+1}+\cdots}^{\text{הזנב קטן}}$$

ואז:

$$f(x)\approx a_0+\cdots+a_n\cdot(x-x_0)^n$$

משפט

תהי $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה x_0.

אזי, קיימת הצגה יחידה $f(x)=a_0+a_1\cdot(x-x_0)+\cdots+a_n\cdot(x-x_0)^n+r(x)$, כך ש:

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow{x\to x_0}0$$

יתר על כן, לכל $k=0,1,\cdots,n$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

הוכחה

יחידות

תחילה, נשים לב כי לכל $0 \le k \le n$: $\frac{r(x)}{(x-x_0)^k} \xrightarrow{x\to x_0} 0$, שכן:

$$\frac{r(x)}{(x-x_0)^k} = \overbrace{\frac{r(x)}{(x-x_0)^n}}^{\to 0} \cdot \overbrace{(x-x_0)^{n-k}}^{\to 0} \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

כעת, נניח שקיימות הצגות:

$$b_0 + b_1 \cdot (x-x_0) + \cdots + (x-x_0)^n + q(x) = f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \cdots + a_n \cdot (x-x_0)^n + r(x)$$

כבמשפט.

נשאיף $x \to x_0$. במקרה זה:

$$a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + \cdots + a_n \cdot (x-x_0)^n + r(x) \to a_0$$

$$b_0 + b_1 \cdot (x-x_0) + \cdots + (x-x_0)^n + q(x) \to b_0$$

לכן: $a_0 = b_0$.

נחסרם משני האגפים ונחלק ב - $x - x_0$:

$$b_1 + b_2 \cdot (x-x_0) + \cdots + b_n \cdot (x-x_0)^{n-1} + \frac{q(x)}{x-x_0} = a_1 + a_2 \cdot (x-x_0) + \cdots + a_n \cdot (x-x_0)^{n-1} + \frac{r(x)}{x-x_0}$$

לכן: $a_1 = b_1$.

נמשיך באופן דומה, ונקבל שלכל $0 \le i \le n$: $a_i = b_i$.

קיום

ניקח את הקירוב הנתון במשפט ונוכיח $\frac{r(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow{x\to x_0} 0$.

נסמן: $p(x) \coloneqq f(x) - r(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n$.

לכל $k = 0, \cdots, n$:

נכתב על ידי יהונתן רגב

$$\frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} \overset{\text{הגדרת המקדם בפולינום}}{\cong} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\Downarrow$$

$$p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$$

מהגדרת $p(x)$: $r(x) = f(x) - p(x)$, לכן לכל $k = 0, \cdots, n$: $r^{(k)}(x_0) = 0$.

מתקיים:

$$((x-x_0)^n)^{(k)} \xrightarrow{x \to x_0} \begin{cases} 0\,, & k < n \\ n!\,, & k = n \end{cases}$$

עפ״י משפט לופיטל (n פעמים; מהסוף להתחלה) (**תרגיל:** ודא קיום תנאי המשפט):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r'(x)}{((x-x_0)^n)'} = \cdots = \lim_{x \to x_0} \frac{r^{(n)}(x)}{((x-x_0)^n)^{(n)}} = \frac{0}{n!} = 0$$

$$\blacksquare$$

משפט

תהי f גזירה n פעמים בקטע הסגור $\left[x_0, x_0 + \overset{>0}{\widetilde{H}}\right]$, והנגזרות רציפות שם. עוד נניח כי הנגזרת $f^{(n+1)}$ קיימת בקטע הפתוח $(x_0, x_0 + H)$.

אזי: לכל $x \in (x_0, x_0 + H)$, קיים $x_0 < \overset{:=c(x)}{\widetilde{c}} < x$ כך ש:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x-x_0)^{n+1}}^{:=r(x)}$$

בדומה עבור סביבה שמאלית של x_0.

הוכחה

$$r(x) := f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n\right)$$

יהי $x \in (x_0, x_0 + H)$.

עבור $z \in [x_0, x_0 + H]$, נסמן:

$$\varphi(z) := f(x) - \left(f(z) + f'(z) \cdot (x - z) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \cdot (x-z)^n\right)$$

אזי:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = r(x) \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\varphi'(z) = -\left(f'(z) + f''(z)\cdot(x-z) - f'(z) + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\cdot(x-z)^n - n\cdot(x-z)^{n-1}\cdot\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right)$$

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}\cdot(x-z)^n$$

תהי $\psi(z) = (x-z)^{n+1}$. עפ"י משפט הערך הממוצע המוכלל (קושי), קיים $x_0 < c < x$ כך ש:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{0-\overbrace{\varphi(x_0)}^{=r(x)}}{0-\psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$$

$$\Downarrow$$

$$r(x) = \psi(x_0)\cdot\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = (x-x_0)^{n+1}\cdot\left(\frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot(x-c)^n}{(n+1)\cdot(x-c)^n}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

■