תרגיל 8- פונקציות מרוכבות

1. האם קיימת פונקציה שלמה המקיימת $|f(z)| = \big|1 - |z|\big|$ לכל $z \in C$.
2. מצאו את כל הפונקציות האנליטיות $\{z||z| < 2\}$ המקיימות $f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}$ לכל $n \in N$.
3. מצאו את כל האפסים של הפונקציות הבאות ומצאו את הסדר שלהם :

א. $f(z) = (e^z - 1)sinzcosz$.

ב. $g(z) = sinz^2$.

ג. $h(z) = \frac{z^2 sinz}{coz-1}$.

4. מצא וסווג את הנקודות הסינגולריות של הפונקציות הבאות :

א. $f(z) = \frac{sinz}{z}$.

ב. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

ג. $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$.

ד. $f(z) = \frac{z}{z-2i} cos\left(\frac{z}{3}\right)$.

ה. $f(z) = \frac{sinz}{z(e^{2\pi z}-1)}$.

5. נניח כי הפונקציות $f(z), g(z), h(z)$ אנליטיות בסביבה מנוקבת של z_0 . בנוסף נתון כי ב- z_0 יש ל-$f(z)$ קוטב מסדר 2 , ל-$g(z)$ יש אפס מסדר 3, ל-$r(z)$ אפס מסדר 2 ול-$h(z)$ אפס מסדר 1. מהו סוג הסינגולריות ב-z_0 של:

א. $\frac{f(z)g(z)}{r(z)+h(z)}$.

ב. $\frac{f(z)+g(z)}{r(z)+h(z)}$.

6. תהי z_0 נקודת סינגולריות עיקרית של $f(z)$. תהי $g(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה. הוכיחו כי z_0 היא גם סינגולרית עיקרית של ההרכבה $g \circ f$.
7. מצא טור לורן עבור הפונקציות הבאות :

א. $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ סביב הנקודה $z_0 = 0$ ועבור $z_1 = 3$.

ב. $f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$ בטבעת $\{z||z-2| > 2\}$ ובטבעת $\{z|0 < |z-2| < 2\}$.