

תרגיל 3 מבוא לתורת החבורות

שאלה 3.1 חשבו את ההופכי של האיברים הבאים:

1. -11 ב U_{27}

2. 34 ב U_{117}

שאלה 3.2 כתבו את טבלת הכפל של U_8 ושל U_{10} . בנוסף עבור כל איבר חשבו את הסדר שלו.

שאלה 3.3 הגדירו פעולה (סבירה) על \mathbb{Z}_n באמצעות נציגים שאינה מוגדרת היטב והדגימו שהיא אינה מוגדרת היטב.

שאלה 3.4 תהי G חבורה סופית.

1. הוכיחו כי לכל $a, b \in G$ מתקיים $o(ab) = o(ba)$.

2. הוכיחו כי לכל $a, b, c \in G$ מתקיים $o(abc) = o(bca)$.

3. מצאו $a, b, c \in S_3$ כך ש $o(abc) \neq o(bac)$.

שאלה 3.5 נגדיר

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

זאת חבורה ביחס לפעולה של כפל מטריצות (מומלץ להוכיח כדי להיווכח). חשבו את הסדר של כל איבר ב G .

שאלה 3.6 תהי K חבורה שבה מתקיים

$$(ab)^3 = a^3b^3$$

הוכיחו או הפריכו: K אבלית. רמז: התשובה נמצאת כבר בתרגיל אחר בדף הזה.

שאלה 3.7 תהי G חבורה אבלית ותהי H תת הקבוצה שמכילה את כל האיברים עם סדר סופי. הוכיחו כי H תת חבורה.

שאלה 3.8 מצאו איבר מסדר 6 ב S_5 . רמז/הדרכה: מצאו איבר מסדר 2 ב S_2 . מצאו איבר מסדר 3 ב S_3 .