88-341-01
כ"ו אדר תש"ע
מרצה: ש. הורוביץ

מבחן באנליזה מודרנית 1
מועד ב'

ענו על כל השאלות הבאות. כל סעיף שווה 8 נקודות. חומר עזר אסור. משך הבחינה שעתיים וחצי.

1. א. הגדירו פונקציה רציפה בהחלט על קטע $[a,b]$.
ב. צטטו את הכללת לבג למשפט היסודי של חשבון אינפיניטסמלי (שני חלקים).
ג. תהי f רציפה בהחלט ב $[a,b]$. הוכיחו שלכל $x\in[a,b]$ $f(x)=\int_a^x f'(t)dt$
ד. ע"פ הסעיפים הנ"ל (ולא בדרך אחרת) הוכיחו שכל פונקציה רציפה בהחלט בקטע $[a,b]$ היא הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות.

2. א. הגדירו פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע $[a,b]$.
ב. קבעו אם הפונקציה $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ היא בעלת השתנות חסומה בקטע $(0,1)$, והצדיקו את תשובתכם.

3. א. צטטו את האפיון של קבוצות מדידות ביחס למידת מכפילה $\mu x\nu$.
ב. צטטו את משפט פוביני.
ג. תהי μ מידת הספירה על $\mathbb{N}$. הסבירו היטב איך שימוש במשפט פוביני לגבי המידה $\mu x\mu$ מביא לידי משפט על התכנסות של טורים כפולים, והוכיחו אותו המשפט.

4. יהי (X,S,μ) מרחב מידה חיובית.
א. הגדירו את המרחבים $L^p(d\mu)$ עבור $0<p\le\infty$.
ב. תהי f פונקציה מדידה $(d\mu)$. לכל $\lambda>0$ נגדיר $E_\lambda=\{x\in X: |f(x)|\ge\lambda\}$. נניח שקיים $M>0$ כך שלכל $\lambda>0$ $\mu(E_\lambda)\le\frac{M}{\lambda^5}$. הוכיחו כי $f\in L^3(d\mu)$.

5. א. צטטו את משפט ההצגה של ריס.
ב. נגדיר $M\subset l^2$ להיות תת-המרחב שמכיל (בדיוק) את כל הסדרות $\{a_n\}\in l^2$ כך ש- $a_n=0$ פרט למספר סופי של אינדקסים. אז M הוא מרחב מכפילה פנימית לא שלם (אין צורך להוכיח זאת.) הראו ע"י דוגמה שמשפט ההצגה של ריס נסתר ב- M.

בהצלחה!