הגדרה: קו ישר $y=ax+b$ נקרא ***אסימפטוטה משופעת*** לפונקציה $f(x)$ אם מתקיים:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ או: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$.

אם כן: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-a\right)=0$ לכן נחשב את הקבועים a,b כך:

$a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)$ וכן לגבי: $x\to-\infty$.

הגדרה: קו ישר מהצורה $x=x_0$ יקרא ***אסימפטוטה אנכית*** אם: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\pm\infty$.

דוגמה: לפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ יש אסימפטוטה אנכית $x=1$. נחשב את המשופעות:

$a=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1,\ b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$ כלומר האסימפטוטה המשופעת היא: $y=x+1$.

שלבים בחקירת פונקציה:

1. מציאת תחום הגדרה.
2. קביעת זוגיות / אי-זוגיות.
3. מציאת נקודות קיצון ותחומי עליה / ירידה (היכן הנגזרת הראשונה מחליפה סימן?)
4. קביעת נקודות פיתול ותחומי קעירות / קמירות (היכן הנגזרת השנייה מחליפה סימן?)
5. חישוב אסימפטוטות (מאונכות ומשופעות).
6. התנהגות הפונקציה ב- $\pm\infty$. חיתוך עם הצירים
7. ציור של גרף הפונקציה.

תרגיל: חקור את הפונקציה: $f(x)=\frac{x^3}{12-x^2}$.

פתרון: 1. תחום הגדרה: $x\neq\pm\sqrt{12}$.

2. $f(-x)=\dfrac{-x^3}{12-x^2}=-f(x)$ כלומר הפונקציה היא אי-זוגית.

3. נגזור ונקבל: $f'(x)=\dfrac{x^2\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^2}$ כלומר הנקודות החשודות הן: $\left\{0\,,\,\pm 6\,,\,\pm\sqrt{12}\right\}$.

נבדוק את התנהגות הנגזרת בנקודות אלו:

$$\frac{x^2\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^2}>0 \Rightarrow -6<x<6 \quad , \quad \frac{x^2\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^2}<0 \Rightarrow x<-6\,,\; x>6$$

קיבלנו שהנגזרת מחליפה סימן משלילי לחיובי בנקודה $x_1=-6$ ומחיובי לשלילי בנקודה $x_2=6$.

מכאן שהפונקציה יורדת בקטעים: $(6,\infty)$, $(-\infty,-6)$ ועולה בקטע: $(-6,6)$,

והנקודות ± 6 הן נקודות קיצון מקומיות (בשאר הנקודות הנגזרת לא מחליפה סימן): $x_1=-6$ נקודת מינימום מקומי ו- $x_2=6$ נקודת מקסימום מקומי.

4. $f''(x)=\dfrac{x\left(72-4x^2\right)\left(12-x^2\right)+4x^3\left(36-x^2\right)}{\left(12-x^2\right)^3}$ מחליפה סימן באפס לכן $x=0$ היא נק' פיתול.

ולא $\pm\sqrt{12}$

5. אסימפטוטות מאונכות. נבדוק את התנהגות הפונקציה בנקודות שבהם הפונקציה שואפת ל- $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\sqrt{12}^+} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to\sqrt{12}^-} f(x)=\infty$$
$$\lim_{x\to-\sqrt{12}^-} f(x)=\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\sqrt{12}^+} f(x)=-\infty$$

כלומר יש לנו שתי אסימפטוטות מאונכות: $x=-\sqrt{12}$, $x=\sqrt{12}$.

אסימפטוטות משופעות. א"מ ב- ∞ היא ישר $y=ax+b$ באשר:

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{12-x^2}=-1$$
$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{12-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+12x-x^3}{12-x^2}=0$$

כלומר: $y=-x$. א"מ ב- $-\infty$ מחושבת באופן דומה כאשר $x\to-\infty$. גם כאן נקבל: $y=-x$.

6. התנהגות הפונקציה ב $\pm\infty$: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{12-x^2} = \infty$.

7. גרף הפונקציה: