נכתב על ידי יהונתן רגב

רשימת משפטים וטענות

1. יהי $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \cdots + a_n \cdot x^n$ פולינום ממשי.

אזי, לכל $k = 0, \cdots, n$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

2. יהיו $f(x)$ פולינום ממעלה n, x_0 קבוע.

אזי:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

3. תהי $f(x)$ גזירה n פעמים בנקודה x_0.

אזי, קיימת הצגה יחידה $f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + \cdots + a_n \cdot (x - x_0)^n + r(x)$,

כך שלכל $k = 0, \cdots, n$:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

ומתקיים:

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

4. תהי f גזירה n פעמים בקטע הסגור $[x_0, x_0 + H]$ עבור $0 < H$ והנגזרות רציפות שם. עוד נניח כי הנגזרת $f^{(n+1)}$ קיימת בקטע הפתוח $(x_0, x_0 + H)$.

אזי, לכל $x \in (x_0, x_0 + H)$, קיים $x_0 < c < x$ כך ש:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \overbrace{\frac{f^{(n+1)}\left(\overbrace{c}^{c(x)}\right)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}^{r(x)}$$

בדומה עבור סביבה שמאלית של x_0.

5. $e \notin \mathbb{Q}$.

6. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. אזי: f עולה בקטע $\Leftrightarrow$ $0 \le f'(x)$.

7. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. אזי: f קבועה בקטע $\Leftrightarrow$ $0 = f'(x)$.

8. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. אזי: f יורדת בקטע $\Leftrightarrow$ $0 \ge f'(x)$.

9. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. אזי: f עולה ממש בקטע $\Leftrightarrow$ $0 \le f'(x)$ ו– $f'(x)$ אינה מתאפס בתת קטע שלם של הקטע הנתון.

נכתב על ידי יהונתן רגב

.10 תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע פתוח או סגור. אזי: f יורדת ממש בקטע $0 \geq f'(x) \Leftrightarrow$ ו– $f'(x)$ אינה מתאפס בתת קטע שלם של הקטע הנתון.

.11 תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי, אם $0 \leq f'(x)$ בסביבה ימנית של c ו – $0 \geq f'(x)$ בסביבה שמאלית של c, אזי c נקודת מינימום.

.12 תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי, אם $0 \geq f'(x)$ בסביבה ימנית של c ו – $0 \leq f'(x)$ בסביבה שמאלית של c, אזי c נקודת מקסימום.

.13 תהי $f(x)$ רציפה בסביבת נקודה c וגזירה בסביבה המנוקבת. אזי, אם הסימן של $f'(x)$ קבוע ושונה מאפס בסביבה של c, אזי c אינה נקודת קיצון.

.14 תהי f גזירה n פעמים, ומקיימת $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

אם n זוגי: a נקודת מקסימום או מינימום אם $f^{(n)}(a) >/< 0$ בהתאמה.

אם n אי זוגי: a אינה נקודת קיצון.

.15 אם $f''(a)$ קיימת, אזי אם $f''(a) >/< 0$, אזי f קעורה או קמורה ב - a בהתאמה.

.16 אם $f''(a)$ קיימת ו – a נקודת פיתול, אזי $f''(a) = 0$.

.17 תהי f גזירה $n \geq 3$ פעמים ב – a ומקיימת: $f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ו - $f^{(n)}(a) = 0$.

אזי: n אי זוגי $\Leftrightarrow$ a נקודת פיתול.

.18 אם g קדומה של f, אזי לכל קבוע $c \in \mathbb{R}$, הפונקציה $g(x) + c$ קדומה של $f(x)$. יתר על כן, כל פונקציה קדומה של f היא מהצורה $g(x) + c$, כאשר $c \in \mathbb{R}$.

.19 <u>לינאריות האינטגרל</u>:

$$\int (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)dx = \alpha \cdot \int f dx + \beta \cdot \int g dx$$

.20 <u>שיטות אינטגרציה</u>: ראה <u>הרצאה 4</u>.

.21 אם $p(x), q(x)$ פולינומים זרים, אזי קיים פולינומים $s(x), t(x)$ כך ש:

$$1 = s(x)p(x) + t(x)q(x)$$

נובע מכך שניתן לקבל כל פולינום $r(x)$ באגף שמאל במקום 1.

.22 אם $q(x) = g_1(x) \cdots g_n(x)$ מכפלת פולינומים זרים אז ניתן להציג:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

.23 כל פולינום ממשי הוא מכפלה של פולינומים ממשיים ממעלה לכל היותר 2.

.24 תמיד ניתן להציג:

$$\frac{p(x)}{\left(q(x)\right)^m} = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)} + \cdots + \frac{p_m(x)}{q(x)^m}$$

כאשר $\deg p_i < \deg g$ לכל i.

25. אם f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f חסומה בקטע.

26. תהי P חלוקה של $[a,b]$. אזי:

$$\underline{s}(P) = \inf_{\tilde{P}}\left\{\sigma\left(\tilde{P}\right)\right\}$$

$$\bar{s}(P) = \sup_{\tilde{P}}\left\{\sigma\left(\tilde{P}\right)\right\}$$

כאשר $\tilde{P}$ חלוקה מנוקדת המתקבלת מבחירת נקודות בקטעי החלוקה P.

27. אם $\tilde{P}$ עידון של P, אז:

$$\bar{s}(P) \geq \bar{s}\left(\tilde{P}\right)$$

$$\underline{s}(P) \leq \underline{s}\left(\tilde{P}\right)$$

28. אם חלוקה $\tilde{P}$ של $[a,b]$ מתקבלת מחלוקה P של $[a,b]$ ע״י הוספת m נקודות, אז:

$$\bar{s}(P) \leq \bar{s}\left(\tilde{P}\right) + m \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

$$\underline{s}(P) \geq \underline{s}\left(\tilde{P}\right) - m \cdot \lambda(P) \cdot \omega$$

כאשר:

$$\omega \coloneqq \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)$$

29. לכל שתי חלוקות $P, \tilde{P}$ של $[a,b]$, מתקיים:

$$\underline{s}(P) \leq \bar{s}\left(\tilde{P}\right)$$

30. מתקיים:

$$(b-a)\cdot \inf_{x\in[a,b]} f(x) \leq \underline{\int_a^b} f(x) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq (b-a)\cdot \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

31. <u>משפט דרבו</u>:

אם $f(x)$ חסומה בקטע $[a,b]$, אז:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \underline{s}(P)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{\lambda(P)\to 0} \bar{s}(P)$$

לכן, למשל, ניתן לחשב את האינטגרל העליון ע"י בחירת סדרת חלוקות P_n כך ש: $\lambda(P_n) \to 0$ כרצוננו, ולחשב את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{s}(P)$$

32. פונקציה f היא אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ לפי רימן $\Leftrightarrow$ האינטגרל העליון של דרבו והאינטגרל התחתון של דרבו קיימים ושווים.
במקרה זה:

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

33. אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז f חסומה שם ולכל $\varepsilon > 0$, קיים $\delta > 0$ כך ש:

א. לכל שתי חלוקות P,Q עם $\lambda(P),\lambda(Q) < \delta$: $\bar{s}(P) - \underline{s}(Q) < \varepsilon$.

ב. לכל חלוקה P עם $\lambda(P) < \delta$: $\bar{s}(P) - \underline{s}(P) < \varepsilon$.

34. אם f חסומה בקטע $[a,b]$, ולכל $\varepsilon > 0$, קיימת:

א. חלוקה P כך ש: $\bar{s}(P) - \underline{s}(P) < \varepsilon$.

ב. חלוקות P,Q כך ש: $\bar{s}(P) - \underline{s}(Q) < \varepsilon$.

אז f אינטגרבילית שם.

35. <u>תנאי רימן לאינטגרביליות</u>:

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ $\Longleftrightarrow$ f חסומה בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} \overbrace{(\Delta_1 \cdot \omega_1 + \cdots + \Delta_k \cdot \omega_k)}^{\bar{s}(P)-\underline{s}(P)} = 0$$

כאשר, לכל $1 \le i \le k$:

$$\omega_i \coloneqq \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

ובגבול, מספיק לקחת סדרה P_n <u>אחת</u> עם $\lambda(P_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

36. אם f רציפה בקטע $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

37. אם f מונוטונית בקטע $[a,b]$, אז היא אינטגרבילית שם.

38. <u>משפט היינה בורל</u>: לכל כיסוי פתוח של קטע סגור יש תת כיסוי סופי.

39. תהי $0 \le f(x)$ בקטע $[a,b]$. אם:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

אז $f(x) = 0$ כמעט בכל הקטע.

40. עבור פונקציות אינטגרביליות f,g בקטע $[a,b]$ וסקלרים $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x)\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)\,dx$$

41. יהיו $f(x) \le g(x)$ פונקציות אינטגרביליות ב - $[a,b]$. אם:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

אז $f(x) = g(x)$ כמעט בכל בקטע.

42. <u>משפט לבג (חלק ראשון)</u>: אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אזי f רציפה כמעט בכל הקטע.

43. <u>משפט לבג (חלק שני):</u> אם f חסומה בקטע $[a,b]$ ורציפה כמעט בכל הקטע, אזי f אינטגרבילית בקטע.

44. כל פונקציה חסומה בקטע סגור עם מספר סופי או בן מניה של נקודות אי רציפות, היא אינטגרבילית בקטע.

45. אם $f(x) = 0$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$ ואינטגרבילית שם, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

46. אם $f(x) = g(x)$ כמעט בכל הקטע $[a,b]$ ואינטגרביליות שם, אזי:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

47. תהי g פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

אם $f(x) = g(x)$ פרט למספר סופי של נקודות בקטע, אז:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

48. אם f,g אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז:

1. הפונקציה $f \cdot g$ אינטגרבילית בקטע.
2. אם קיים $0 < c$ כך ש: $c \le |g(x)|$ לכל $x \in [a,b]$, אז: f/g אינטגרבילית בקטע.

49. אם f אינטגבילית בקטע $[a,b]$, אז לכל תת קטע $[\alpha,\beta]\subseteq[a,b]$, f אינטגרבילית בקטע $[\alpha,\beta]$.

50. יהיו $a<c<b$, f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

51. לכל a,b,c (לאו דווקא מסודרים $a<b<c$), ולכל פונקציה f אינטגרבילית בכל הקטעים הרלוונטים:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

52. אם $f(x)\le g(x)$ אינטגרביליות בקטע $[a,b]$, אז:

$$\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b g(x)\,dx$$

53. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. אזי, הפונקציה $|f(x)|$ אינטגרבילית שם, ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b |f(x)|\,dx$$

54. <u>משפט הערך הממוצע האינטגרלי</u>: יהיו f רציפה בקטע $[a,b]$, g אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו $0\le g(x)$ בקטע. אזי, קיימת נקודה $c\in[a,b]$ עבורה:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx=f(c)\cdot\int_a^b g(x)\,dx$$

55. תהי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. תהי:

$$F(x)\coloneqq\int_a^x f(t)\,dt$$

אזי, F רציפה בקטע $[a,b]$.

56. <u>המשפט היסודי של חשבון אינפיניטסימלי</u>: תהי f אינטגרבילית ב - $[a,b]$. תהי:

$$F(x)\coloneqq\int_a^x f(t)\,dt$$

מוגדרת בקטע. אזי לכל נקודת רציפות x של f מתקיים: $F'(x)=f(x)$.

57. <u>הנוסחה היסודית (לייבניץ ניוטון)</u>: תהי f רציפה בקטע $[a,b]$. תהי F פונקציה קדומה של f ב - $[a,b]$. אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

הנוסחה נכונה, למשל, עבור הפונקציה הקדומה:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dx$$

58. <u>הכללה של הנוסחה</u>: תהי f אינטג' ב - $[a,b]$. תהי F פונקציה רציפה בקטע, ופרט למספר סופי של נקודות, F גזירה ומקיימת $F'(x) = f(x)$ אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

59. <u>אינטגרציה בחלקים</u>: עבור פונקציות גזירות u, v בקטע $[a,b]$ מתקיים:

$$\int_a^b u\,dv = uv\,|_a^b - \int_a^b v\,du$$

60. <u>הצבה (גרסה 1)</u>: יהיו f רציפה בקטע $[a,b]$, $g: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ גזירה ברציפות ו - $g(\alpha) = a\,, g(\beta) = b$.
אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt$$

61. <u>הצבה (גרסה 2)</u>: יהיו f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, $g: [\alpha,\beta] \to [a,b]$ עולה ממש, גזירה ברציפות ו - $g(\alpha) = a\,, g(\beta) = b$.
אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(g(t)\big)g'(t)\,dt$$

62. אם F פונקציה קדומה של f ו $f -$ רציפה ב - $[a,\infty)$, אזי:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = F(\infty) - F(a)$$

63. לכל $a < c$:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx$$

נכתב על ידי יהונתן רגב

64. <u>התכנסות אינטגרל לא אמיתי תלויה רק בזנב</u>: תהי $a \in \mathbb{R}$. תהי f אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ לכל $a < b$.

התכונות הבאות שקולות:

1. האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

קיים (במובן הצר).

2. קיים $a \le c$ כך שהאינטגרל:

$$\int_c^\infty f(x)dx$$

קיים (במובן הצר).

3. לכל $a \le c$, האינטגרל:

$$\int_c^\infty f(x)dx$$

קיים (במובן הצר).

65. <u>קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל</u>: האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

קיים במובן הצר $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $B \in \mathbb{R}$ כך שלכל $B < b_1 < b_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

66. <u>מבחן ההשוואה</u>: אם קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש: $0 \le f(x) \le c \cdot g(x)$, אז:

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

$$\int_a^\infty f(x)dx = \infty \Rightarrow \int_a^\infty g(x)dx = \infty$$

67. <u>מבחן ההשוואה הגבולי</u>: יהיו $0 < f(x), g(x)$ כך ש:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x\to\infty} c$$

עבור $0 < c < \infty$.

אזי:

$$\int_a^\infty g(x)dx < \infty \Leftrightarrow \int_a^\infty f(x)dx < \infty$$

68. אינטגרל מתכנס בהחלט, מתכנס.

69. <u>מבחן דיריכלה (גרסה 1)</u>: יהיו:

1. f רציפה ב - $[a,\infty)$ וקיים קבוע $c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < c$$

לכל $a < b$.

2. g גזירה ברציפות ב - $[a,\infty)$, $g(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$, והאינטגרל:

$$\int_a^\infty g'(x)\,dx$$

מתכנס בהחלט.

אזי:

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$$

מתכנס.

70. <u>מבחן דיריכלה (גרסה 2)</u>: יהיו:

1. $f(x)$ רציפה ב - $[a,\infty)$, כך שקיים $c \in \mathbb{R}$ עבורו לכל $a < b$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < c$$

2. $g(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0$ מונוטונית וגזירה ברציפות ב - $[a,\infty)$.

אזי, האינטגרל:

$$\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\,dx$$

מתכנס.

71. <u>מבחן האינטגרל</u>: יהי $k \in \mathbb{N}$. תהי $f(x)$ חיובית, יורדת ואינטגרבילית בכל קטע $[k,b]$ עבור $k < b$.

אזי:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f(n) \leq \int_{k}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

בפרט, האינטגרל:

$$\int_{k}^{\infty} f(x)\,dx$$

והטור:

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n)$$

מתכנסים ומתבדרים יחד.

72. תהי f אינטגרבילית בכל תת קטע של $(a,b]$ ו a – נקודת סינגולריות (יחידה) של f.
אזי:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{y^2}\,dy$$

לכן, כל אינטגרל לא אמיתי מסוג שני הוא אינטגרל לא אמיתי מסוג ראשון (ולהיפך).
לכן, המשפטים עבור אינטגרלים לא אמיתיים מסוג ראשון, תקפים גם עבור אינטגרלים לא אמיתיים מסוג שני (עם שינויים מתאימים).

73. יהיו f_n, f פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.
התכונות הבאות שקולות:

1. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ במידה שווה בתחום X.
2. מתקיים:

$$\varepsilon_n \coloneqq \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

3. לכל סדרה $x_n \in X$:

$$|f_n(x_n)-f(x_n)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

74. <u>קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה</u>: יהיו f_n פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.
התכונות הבאות שקולות:

1. $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ במידה שווה בתחום X עבור פונקציה f המוגדרת בתחום X.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $N \leq n, m \in \mathbb{N}$, לכל $x \in X$ מתקיים:

$$|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$$

75. <u>מבחן ויירשטרס</u>: יהיו f_n פונקציות המוגדרות בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.

אם לכל $n \in \mathbb{N}$, לכל $x \in X$ מתקיים: $|f_n(x)| \leq a_n$ עבור סדרה a_n, כך שהטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

אזי, הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

מתכנס במידה שווה בתחום X.

76. יהיו $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ במיה שווה בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$.

אזי, לכל $x_0 \in X$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: f_n רציפה ב - x_0, רציפה ב - x_0.

77. גבול במידה שווה של פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה.

78. אם טור פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה, אזי סכומו הוא פונקציה רציפה.

79. <u>משפט דיני עבור פונקציות</u>: אם $f_n \searrow f$ בקטע סגור והפונקציות רציפות שם, אז ההתכנסות היא במידה שווה.

80. <u>משפט דיני עבור טורים</u>: יהי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

טור של פונקציות רציפות $0 \leq f_n(x)$ בקטע סגור.

התכונות הבאות שקולות:

1. הטור מתכנס לפונקציה רציפה.
2. הטור מתכנס במידה שווה לפונקציה כלשהי.

81. גבול במידה שווה של פונקציות חסומות בתחום X הוא פונקציה חסומה בתחום X.

82. גבול במידה שווה של פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ הוא פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

83. <u>אינטגרציה איבר איבר עבור פונקציות</u>: יהיו f_n פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ כך ש: $f_n \longrightarrow f$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

אזי:

$$\int_a^b f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)$$

84. <u>אינטגרציה איבר איבר עבור טורים</u>: יהיו f_n פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ כך ש:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = s(x)$$

במידה שווה בקטע $[a,b]$.

אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\ dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx$$

85. אם $f \xrightarrow{n\to\infty} f_n$ ו - $g \xrightarrow{n\to\infty} g_n$ במידה שווה בתחום $X \subseteq \mathbb{R}$, אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$\alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ במידה שווה בתחום X.

86. <u>גזירה איבר איבר עבור פונקציות</u>: נניח שהתכונות הבאות מתקיימות בקטע סגור $[a,b]$.

1. f_n פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$.
2. סדרת הפונקציות f_n' מתכנסת במידה שווה.
3. הפונקציה $f_n(x)$ מתכנסת לפחות בנקודה אחת c.

אזי:

1. קיימת פונקציה f כך ש: $f_n \longrightarrow f$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.
2. $f_n' \longrightarrow f'$ במידה שווה בקטע $[a,b]$.

87. <u>גזירה איבר איבר עבור טורים</u>: נניח שהתכונות הבאות מתקיימות בקטע הסגור $[a,b]$.

1. f_n פונקציות גזירות בקטע $[a,b]$.
2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.
3. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס לפחות בנקודה אחת c.

אזי:

1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[a,b]$.
2. מתקיים: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$.

88. קיימת פונקציה רציפה ב - $\mathbb{R}$ שאינה גזירה באף נקודה.

89. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות.

אם הטור מתכנס בנקודה x_0, אזי הוא מתכנס בכל נקודה y כך ש: $|y| < |x_0|$.

90. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אם $|x_0| < R$ אזי הטור מתכנס בהחלט ב – x_0.

אם $|x_0| > R$ אזי הטור מתבדר ב - x_0.

91. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

1. <u>נוסחת קושי הדמר</u>:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

2. <u>נוסחת דלאמבר</u>: אם הגבול:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

קיים, אזי $L = R$.

92. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אזי, הטור מתכנס במידה שווה בכל קטע מהצורה $[-r, r]$ כאשר $0 < r < R$.

93. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אם הטור מתכנס בהחלט ב - R, אזי הוא מתכנס במידה שווה בקטע $[-R, R]$.

94. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אם הטור מתבדר ב - R, אזי הוא אינו מתכנס במידה שווה בקטע $(-R, R)$.

95. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אם הטור מתכנס ב $-R$, אזי הוא מתכנס במידה שווה בכל קטע מהצורה $[r,R]$ כאשר $-R<r<R$.

96. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אזי, הטור מתכנס במידה שווה בכל תת קטע סגור של תחום ההתכנסות.

97. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי $f(x)$ הסכום שלו.

אזי, $f(x)$ רציפה בכל נקודה x_0 בתחום ההתכנסות של הטור.

98. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, יהי R רדיוס ההתכנסות שלו, ויהי $f(x)$ הסכום שלו.

נתבונן בטור (החזקות):

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot x_n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$$

יהי $s(x)$ הסכום של טור הנגזרות.

אזי:

1. רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא גם R.
2. לכל $x_0 \in (-R,R)$, $f(x)$גזירה ב - x_0 ומקיימת $f'(x)=s(x)$.
3. אם טור הנגזרות מתכנס ב - R, אזי הטור המקורי גם מתכנס ב – R והסכום $f(x)$ גזיר משמאל ומקיים: $f'_-(R)=s(R)$.

99. יהי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

טור חזקות, ויהי R רדיוס ההתכנסות שלו.

אזי:

1. מתקיים: תחום ההתכנסות של טור הנגזרות מוכל בתחום ההתכנסות של הטור המקורי, ותחום ההתכנסות של הטור המקורי מוכל בתחום ההתכנסות של טור הנגזרות.
2. לכל x בתחום ההתכנסות הרלוונטי מתקיים:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_n \cdot x^n$$

100. תהי f פונקציה ויהי $r > 0$ כך ש – f גזירה בכל סדר בתחום $[-r, r]$.

אם קיים קבוע $c \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [-r, r]$ מתקיים: $\left|f^{(n)}(x)\right| < c$, או ש: $\frac{r^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ במידה שווה בתחום $[-r, r]$, אזי:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

■