אלגברה לינארית 2 | תשפ"א מועד ב'

פתרון המבחן | יונתן סמידוברסקי

שאלה 1

(סעיף א)

תהי $A \in \mathbb{C}^{4*4}$ מטריצה מרוכבת שכל רכיביה ממשיים, נתון $A^4 \neq 0$ וכן $A^4 + A^2 = 0$ כמו כן, נתון $rank(A) = 2$.
ראשית, הפולינום הבא מאפס את המטריצה

$$x^4 + x^2 = x^2(x^2+1) = x^2(x+i)(x-i)$$

כעת

$$m_A(x) \in \{x, x+i, x-i, (x-i)(x+i), x(x-i), x(x+i), x^2, x(x-i)(x+i), x^2(x+i)(x-i)\}$$

כעת, $m_A(x) \neq x, x^2$ כי אם $A = 0$ או $A^2 = 0$ אז $A^4 = 0$
כמו כן $m_A(x) \neq x+i, x-i$ כי כל רכיביה ממשיים וזה גורר $A = iI$ או $A = -iI$

$$m_A(x) \in \{(x-i)(x+i), x(x-i), x(x+i), x(x-i)(x+i), x^2(x+i)(x-i)\}$$

כעת $2 = rank(A) = n - dim(N(A-0I)) = 4 - dim(N(A-0I))$ ולכן 0 הוא ע"ע של A מריבוי גיאומטרי 2. הוא חייב להופיע בפולינום מינימלי.

$$m_A(x) \in \{x(x-i), x(x+i), x(x-i)(x+i), x^2(x+i)(x-i)\}$$

אבל ידוע כי $tr(A)$ הינו סכום הערכים העצמיים, ובפרט חייב להיות ממשיים. כמו כן ידוע כי הפולינום המינימלי מכיל את כל הע"ע
ואם $m_A(x) = x(x-i)$ אז $tr(A) \notin \mathbb{R}$ ובדומה עבור $x(x+i)$
נשארנו עם $m_A(x) = x^2(x+i)(x-i)$ או $m_A(x) = x(x-i)(x+i)$

אם $m_A(x) = x^2(x+i)(x-i)$ אזי

ערך עצמי/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום מינימלי
0		2	2
$-i$			1
i			1

אבל אז יש לנו בצורת ז'ורדן שני בלוקים שהמקסימלי מביניהם הוא בגודל 2, וזו סתירה לכך שיש עוד שני בלוקים והמטריצה בגודל 4*4

לכן מקבלים $m_A(x) = x(x+i)(x-i)$ אזי

ערך עצמי/תכונה	ריבוי אלגברי	ריבוי גיאומטרי	חזקה בפולינום מינימלי
0		2	1
$-i$			1
i			1

כלומר

$$J(A) = J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(-i) \oplus J_1(i) = diag(0,0,-i,i)$$

(סעיף ב)

האם המטריצות דומות?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 & 0 \\ 9 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

מוצאים את צורת הז'ורדן של שתיהן ורואים

$$J(A) = J_2(2) \oplus J_2(2) \neq J_1(2) \oplus J_3(2) = J(B)$$

כעת נניח בשלילה $A \sim B$
ומתקיים $B \sim J(B)$ אזי הוכחנו שדמיון מטריצות הוא יחס שקילות ומטרנזיטיביות $A \sim J(B) \neq J(A)$ בסתירה ליחידות צורת ז'ורדן (עד כדי סדר הבלוקים).
סך הכל קיבלנו $A \not\sim B$

שאלה 2

(סעיף א)

תהי $A \in \mathbb{C}^{3*3}$ אנטי סימטרית, כלומר $A^t = -A$, צריך להוכיח שכל הערכים העצמיים שלה מדומים טהורים.
יהי $a + bi = \lambda \in \sigma(A)$ נראה כי $a = 0$. כעת ניקח v ו"ע הנורמלי המתאים
ונסתכל על המכפלה הפנימית

$$< Av, v >$$

אבל מצד אחד

$$< Av, v >=< \lambda v, v >= \lambda < v, v >= \lambda ||v|| = \lambda$$

ומצד שני (מסתכלים על ההעתקה $Tv = Av$עם בסיס סטנדרטי ואז על ההעתקה הצמודה)

$$< Av, v >=< v, A^* v >=< v, \overline{A^t} v >=< v, -\overline{A} v >=< v, -Av >$$

משום שכל רכיביה ממשיים והיא אנטי-סימטרית. נמשיך לפתח

$$< v, -Av >=< v, -\lambda v >= -\overline{\lambda} < v, v >= -\overline{\lambda} ||v|| = -\overline{\lambda}$$

כעת קיבלנו $\lambda = -\overline{\lambda}$
כלומר $a = 0 \Leftarrow a + bi = -a + bi \Leftarrow a + bi = -(a - bi)$
כפי שרצינו.

(סעיף ב)

יהיו $v_2 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{6}i \\ 2-\sqrt{6}i \\ 2 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{6}i \\ 2+\sqrt{6}i \\ 2 \end{pmatrix}$. נמצא את המרחב הניצב ל$span\{v_1, v_2\}$
אבל מההרצאה $\{v_1, v_2\}^\perp = (span\{v_1, v_2\})^\perp$. נפתור לפי ההגדרה

$$\{v_1, v_2\}^\perp = \{v \in \mathbb{C}^3 | < v, v_1 >= 0, < v, v_2 >= 0\}$$

אלה בעצם כל הוקטורים $v \in \mathbb{C}^3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ המקיימים

$$\left\{ \begin{array}{c} (-2+\sqrt{6}i)\cdot a + (2+\sqrt{6}i)\cdot b + 2c \\ (-2-\sqrt{6}i)\cdot a + (2-\sqrt{6}i)\cdot b + 2c \end{array} \right\}$$

אבל זהו בעצם

$$N(A) = N\begin{pmatrix} -2+\sqrt{6}i & 2+\sqrt{6}i & 2 \\ -2-\sqrt{6}i & 2-\sqrt{6}i & 2 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} -2+\sqrt{6}i & 2+\sqrt{6}i & 2 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} \sqrt{6}i & \sqrt{6}i & 0 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

(סעיף ג)

נניח שv_1, v_2 וקטורים עצמיים, v_3 לא בהכרח וקטור עצמי כי למשל

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

הוא וקטור ממשי, והמכפלה שלו בוקטור ממשי ייתן וקטור עם רכיבים ממשיים- בסתירה לכך שהערכים העצמיים מדומים טהורים.

שאלה 3

(סעיף א)

יהיו $A,B\in\mathbb{R}^{n*n}$ כך ש$||Av||=||Bv||$ וכן A הפיכה
נניח בשלילה B אינה הפיכה, אזי 0 הינו ע"ע שלה. וקיים $v\in\mathbb{R}^n$ הו"ע המתאים כך ש$Av=0$
כעת $||Av||=||Bv||=0$
ומקבלים $Bv=0$ מאי שליליות, כלומר 0 ערך עצמי של B בסתירה. קיבלנו ש0 אינו ע"ע של A ולכן היא הפיכה.

(סעיף ב)

צריך להוכיח AB^{-1} אוניטרית
שקול לכך שAB^{-1} שומרת נורמה, כלומר יהי $v\in\mathbb{R}^n$ נראה כי $||AB^{-1}v||=||v||$, אבל

$$||AB^{-1}v||=||A(B^{-1}v)||$$

וכן $B^{-1}v\in\mathbb{R}^n$ ולכן מתקיים $||A(B^{-1}v)||=||B(B^{-1}v)||=||(BB^{-1})v||=||v||$ וסיימנו.

(סעיף ג)

הוכיחו/הפריכו: יהי $W\subseteq\mathbb{R}^n$ ת"מ נניח ש$AW\subseteq W$ אז $A^t(W^\perp)\subseteq W^\perp$
<u>**הוכחה**</u> יהי $v\in A^t(W^\perp)$ כלומר קיים $u\in W^\perp$ כך ש$A^tu=v$
נראה כי $v=A^tu\in W^\perp$. יהי $w\in W$, כעת

$$<w,v>=<w,A^tu>=<w,A^*u>$$

המעבר האחרון נובע מכך שאנחנו מעל הממשיים

$$<w,A^*u>=<Aw,u>$$

$$<w,v>=<Aw,u>=0$$

כי $Aw\in W$ מהנתון ו$w\in W^\perp$. סה"כ $v=A^tu\in W^\perp$ וסיימנו.