שיטות נומרית - תרגול 1

אנליזה של שגיאות

הגדרה: יהי X ערך אמיתי ו- $\tilde{X}$ ערך מקורב.
השגיאה המוחלטת הנובעת מ"ק הירלק של X ל- $\tilde{X}$ היא

שגיאה מוחלטת: $\Delta X = |X - \tilde{X}|$

במקרה זה **השגיאה היחסית** $\delta_X = \frac{\Delta X}{|X|}$

לרוב נתבש תמיד לשגיאה.

תרגיל: חשב את השגיאה המוחלטת והשגיאה היחסית בשר

$X = 69,000,000$

$\tilde{X} = 68,967,549$

$\Delta X = |69,000,000 - 68,967,549| = 32,451$

$\delta_X = \frac{32,451}{69,000,000} = 0.00047$

"דון מספרים במתשב.

ישנם 2 פרמטרים שנהוג להשתמש בהם:

1) fixed point - נקודה קבועה כל מס מוצג ע"י כמה ספרות שנמצא לפני הנק' העשרוני ומס קבוע של ספרות אחרי הנקודה.
ספרות אחרי הנק' נקראות ספרות דצימליות.
לדוגמא 0.00123 (5 ספרות דצימליות).

אם המס מעוגל ל- d ספרות דצימליות מתווספת אל.ו שגיאה **מוחלטת** המוגדרת 10^{-d} אם עוקבים ~~[illegible]~~ בקיבולת.
או $0.5 \cdot 10^{-d}$ אם עוקבים בהעגלה.

דוגמא: $\pi \approx 3.14159265358$ מעוגל ל- 4 ספרות דצימליות מביא חסם לשגיאה יחסית

$|\Delta X| < 0.5 \cdot 10^{-4}$

$\Rightarrow \delta_X = \frac{|\Delta X|}{|X|} \le \frac{0.5 \cdot 10^{-4}}{3.1415} = 1.59 \cdot 10^{-5}$

floating point

(2

"נק' צפה" - כל מספר מוצג ע"י מנטיסה של מנטיסה

בעלת אורך קבועה תוקה המתאימה של הבסיס

$X = \sigma \cdot (M)_\beta^{e}$, ספרות במנטיסה נקראות ספרות משמעותיות $e \to$ exp.

σ - סימן, β - בסיס, $(M)_\beta$ - מנטיסה, e - exp מס שלם.

דוגמא: במס 123456. כמה ספרות משמעותיות?

$\underbrace{1.23456}_{\text{מנטיסה}} \cdot \underbrace{10}_{\text{בסיס}}^{5 \to \text{תוקה}}$ 6 ספרות משמעותיות

1234567.8 1234567.8

$\underbrace{1.2345678}_{\text{מנטיסה}} \cdot 10^6$ 8 ספרות משמעותיות

$\underbrace{1.23}\cdot 10^{-3}$ שלוש ספרות משמעותיות 0.00123

אם המס מיוצג ל- t ספרות משמעותיות מתוספת אליו שגיאה

יחסית מסומנת ע"י 10^{1-t} אם מעגלים בקיצוץ.

או $0.5 \cdot 10^{1-t}$ אם מעגלים בהטלה.

דוגמא: תאוצת הכבידה g יצוגה עם 2 ספרות משמעותיות

$g = 9.8$ מהי השגיאה המוחלטת, כאשר השתמשנו בעיקול.

$$|\delta_x| \le 0.5 \cdot 10^{1-2}$$

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \le 0.5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow \frac{|\Delta x|}{9.8} \le \underbrace{0.5 \cdot 10^{-1}}_{0.05} \cdot 9.8 \approx 0.49.$$

באופן תיקני - המנטיסה בעלת p ספרות תואה מהצורה.

$0 \le d_i < B \qquad d_0 \ne 0 \qquad d_0 . d_1 d_2 d_3 \dots d_{p-1}$

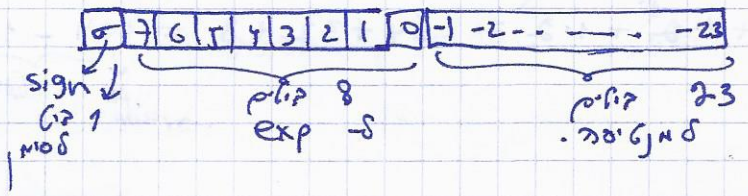
$B = 2$ כמו במחשב. רק ספרות היינו 0,1.

במחשב ניתן לשים שני תקנים:

תקן float - משתמש ב- 32 סיביות (ביטים) לייצוג המספר.

-"- double - משתמש ב- 64 סיביות (ביטים) לייצוג המספר.

IEEE 32 — float — תקן 32 סה"כ



s : סימן 0 - מס' חיובי
1 - מס' שלילי.

תצוגה: 8 ביטים ישמשו אפשרות לייצוג של 0 ! -1 (2^8). - שני מקרים מיוחדים 0 ; 1-

כאשר התצוגה היא מ- $\{-127 - 127\}$ מהתצוגה נורג מצוגה מתמשכת

127 ונקבל מס' בין $\{-126 - 127\}$, מצוגה מתמטית.

76543210
00110010

דוגמא: בהינתן התצוגה הבאה:

$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^1 = 32 + 16 + 2 = 50 - 127 = -77$ משקל מדיני

מנטיסה: תצוגת המנטיסה הן שלילית ומתחילה מ- -1 באופן אוטומטי נוסף 1 לפני המנטיסה.

-1 -2 -3 -4 -5 - - - -23
0 1 1 0 1 0 0 ... 0

דוגמא:

$M = 1 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-5} = 1.40625$

$M = 1 + b_{22} \cdot 2^{-1} + b_{21} 2^{-2} + \dots + b_0 \cdot 2^{-23}$

$b_0 - b_{22}$ הם או 0 או 1.

תצוגה כשל המס' במנטיסה הן 1 אל המס' כמעט 2.
לעומת $b_{22} - b_0$ הן 1.

$$\boxed{number = (-1)^{sign} \cdot (1 + mantisa) \cdot 2^{exp-127}}$$

בנוסחה כללית מדיוקי לשמרני.

דוגמא: נתון המס המלא בתוך float, מהו המס? בצורה עשרונית?

01101000 | M10010010...0

פתרון: סימן: 0 לכן הוא חיובי.

7 6 5 4 3 2 1 0
0 1 1 0 1 0 0 0

exp.

$$exp = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 = 64+32+8 = \underbrace{104 - 127}_{\text{נירמול}} =$$

מקבלים עשרוני

$$exp = -23$$

מנטיסה:

-1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 — —
1 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0

$$(M)_2 = 1 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + 1\cdot 2^{-3} + 1\cdot 2^{-6} + 1\cdot 2^{-9} = 1.892$$

$$X = 1.892 \cdot 2^{-23} = 2.25 \cdot 10^{-7}$$

תרגיל: חשב את המס 46.75 בתוך float.

$$46.75 = 46 + 0.75$$

46 : 2	
23	0
11	1
5	1
2	1
1	0
0	1

מלמעלה למטה

5 4 3 2 1 0
1 0 1 1 1 0

$$1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 = 46.$$

$$\underbrace{32 + 8}_{40} + \underbrace{4 + 2}_{6}$$

0.75	x 2
1.5	
1.0	
0.0	
1.1	

מלמעלה למטה

-1 -2 — — —
0. 1 1 0 . . . .

$$1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$46.75 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2}$$

$$\text{exp} \leftarrow \underbrace{2^{5}}_{\text{exp}} \underbrace{[1 + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-6} + 2^{-7}]}_{\text{מנטיסה}}$$

$$\text{exp} = \underbrace{5 + 127}_{\text{ניזמנל}} = 132 = \underbrace{2^{7}}_{128} + \underbrace{2^{2}}_{4}$$

אישרוני ← לפיעמי

0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0
7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-	-	-												

בינרי.

התצקה הנמוכה ביותר היא -126 , בבתיב

0	0	0	0	0	0	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

$1 \cdot 2^{0} = 1 - 127 = -126$ ✓

0.0000001 ובמידה ב- exp

התצקה הגבוהה ביותר היא 127 בבתיב

1	1	1	1	1	1	1	0

1111110

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 \Rightarrow S_7 = \frac{2 \cdot (2^7 - 1)}{2 - 1} = 254 - 127 = 127 \checkmark$$

כאשר התצקה כולה אפסים ~~[illegible]~~ כהו יוצג המס אפס.

אם התצקה כולה "1" "11111111" וגם המנטיסה כולה 1 זה אינסוף

אם התצקה "1" ומספר שקמעת כולשהו במנטיסה יש אפס זה NAN.

IEEE 64 ⟶ double

תקן

1 תפוס	11 ביטים	52 ביטים Mantisa = 64 ביטים

$$\text{num} = (-1)^{\text{sign}} (1 + \text{mantisa}) \cdot 2^{\text{exp} - 1023}$$

יוצג מס מבינרי לטשרוני.

-71.3125

Sign $\Rightarrow$ 1 לכן שלילי סימן

$71 + 0.3125$

	:2
71	
35	1
17	1
8	1
4	0
2	0
1	0
0	1

6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	1	1	1

$$\underbrace{1\cdot 2^6}_{64} + \underbrace{1\cdot 2^2}_{4} + \underbrace{1\cdot 2^1}_{2} + \underbrace{1\cdot 2^0}_{1} = 71$$

	×2
0.	3125
0.	625
1.	25
0.	5
1.	0
0.	0
1	
1	

$$0.\overset{-1}{0}\overset{-2}{1}\overset{-3}{0}\overset{-4}{1}0\ldots$$

$$1\cdot 2^{-2} + 2^{-4} = 0.3125$$

$$2^6 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} = 71.3125$$

exp $\leftarrow$ $2^{6}\left[1 + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-8} + 2^{-10}\right]$

$$\exp = 6 + 1023 = \underbrace{1029}_{1024+5} = 2^{10} + 2^2 + 2^0$$

$1024 = 2$

אם נשמיט סימן מוסיפים קבוע bias

1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	———	0
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	———	-52

הגדרה: $\varepsilon_{machine}$ השאר הגדול

$$|\varepsilon_{machine}| \le 2^{-23} \sim 1.19\cdot 10^{-7}$$ float עבור

$$|\varepsilon_{machine}| \le 2^{-52} \sim 2.22\cdot 10^{-16}$$ double עבור

לדוגמא $1+x$ אם $x < \varepsilon_{machine} \Leftarrow 1+x = 1$.

תרגיל חשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = ?$

כאשר $n = \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad n = \frac{1}{\varepsilon}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1$$

כאשר $\varepsilon < \varepsilon_{machine}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$$

כאשר $\varepsilon > \varepsilon_{machine}$

לעומת $n = \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon_{machine}} \Leftarrow$ הגבול 1.

$n = \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{\varepsilon_{machine}} \Leftarrow$ הגבול הוא e.

תרגיל האם התלבטת סדר האיברים בסכום יכולה לתת תוצאה שונה ע"י חישוב מקדים? אם כן הראה. וחשב את $1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000$ 2- 2 דרכים שונות כשיודע כי המחשב נוטה לשמור 6 ספרות דיוק

דרך 1: $1{,}000{,}000 + 1{,}000{,}000 = 10^6 + 10^6$

דרך 2: $1{,}000{,}000 + \underbrace{1 + \dots + 1}_{\text{מוזנחים בגלל}} = 1{,}000{,}000$

הגבול שהמחשב יכול לצבור בדיוק 6 ספרות דיוק נקבל כי

$$1{,}000{,}000 + 1 = 1{,}\cancel{000{,}001}$$

$$\underbrace{1.000001}\cdot 10^6$$

~~7 מקומות~~ אין לו מקום.

לכן $1{,}000{,}000 + 1 = \underline{1{,}000{,}000}$

שגיאת קירוב

תהי f פונקציה שגזירה N+1 פעמים בקטע $[x_0, x]$ אזי טור טיילור המקיים לכל x_0 הינו

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} f^{(i)}(x_0) \cdot \frac{(x-x_0)^i}{i!} + R_{N+1}(x)$$

$$R_{N+1}(x) = f^{(N+1)}(c) \cdot \frac{(x-x_0)^{N+1}}{(N+1)!}$$

כאשר $x_0 \le c \le x$

תרגיל קרבו את הפונ' $f(x) = e^{2x}$ ע"י טור טיילור עד סדר 2 סביב $x_0 = 1$ בקטע $[1,10]$ ואמדו חסם לשגיאה.

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)\cdot(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$f(1) = e^2$$

$$f'(1) = 2e^2$$

$$f''(1) = 4e^2$$

$$f(x) = e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{4e^2}{2}(x-1)^2$$

$$f'''(c) = 8e^{2c}$$

$$R_3(x) = \frac{8e^{2c}}{3!}(x-1)^3 \qquad 1 \le c \le 10$$

$$|R_3(x)| \le \frac{8e^{2c}}{6} \cdot 9^3$$

נוצרת שגיאה הכי קטנה.