פתרון מועד א' אינפי 3 תשע"ח (לא כולל משפטים להוכחה)

27 בפברואר 2018

3. חשבו את נפח הגוף החסום על ידי:
   a. $x^2+y^2=1$.
   b. $x+y+z=1$.
   c. $x+y-z=4$.

<u>פתרון:</u>

אנו יודעים שהנפח של גוף G מחושב על ידי:

$$V=\iiint\limits_G 1dxdydz$$

גיאומטרית, הגוף שלנו הוא חלק הגליל a שכלוא בין המישורים b,c. את המישורים אפשר להציג כך:

$$z=1-x-y,\ \ z=-4+x+y$$

בתוך הגליל, $x^2+y^2\le 1$ ובפרט $x,y\le 1$, ולכן המישור העליון מבין השניים הוא $z=1-x-y$. מכאן, הגבולות של z הם:

$$-4+x+y\le z\le 1-x-y$$

נבצע את האינטגרציה לפי z:

$$V=\iint z|_{z=-4+x+y}^{z=1-x-y}\,dxdy=\iint\left((1-x-y)-(-4+x+y)\right)dxdy$$

ונקבל:

$$V=\iint\left(5-2x-2y\right)dxdy$$

כעת, התחום של x,y הוא $x^2+y^2\leq 1$ ולכן נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$$

כאשר $0\leq r\leq 1,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi$. היעקוביאן הוא r, ולכן:

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\left(5-2r\cos\theta-2r\sin\theta\right)rd\theta dr$$

כעת, $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=0$, ונישאר עם:

$$=\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}5rd\theta dr=2\pi\cdot\int\limits_0^1 5rdr=5\pi\ \cdot r^2\Big|_{r=0}^{r=1}=5\pi$$

וזהו הנפח.

4. יהי D דיסק במישור עם רדיוס R, $D=\overline{B}\left(0,1\right)$, ותהי $F\in C^1\left(\left[0,R^2\right]\right)$ פונקציה של משתנה אחד כך ש: $F'=f$.

א. הוכיחו כי: $\iint_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\pi\cdot\left(F\left(R^2\right)-F\left(0\right)\right)$.

ב. חשבו: $\iint_D\cos\left(x^2+y^2\right)dxdy$.

ג. חשבו: $\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$.

<u>פתרון:</u>

א. כדי לחשב את האינטגרל, נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta$$

אנו יודעים שמתקיים: $x^2+y^2=r^2$.

מכיוון שהתחום הוא דיסק עם רדיוס R, נקבל שהתחומים הם $0\leq r\leq R,\ \ 0\leq\theta\leq 2\pi$.

היעוקביאן הוא r, ולכן:

$$\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\int\limits_0^R\int\limits_0^{2\pi} f\left(r^2\right)\cdot rd\theta dr=2\pi\cdot\int\limits_0^R f\left(r^2\right)rdr$$

כעת, נציב $u=r^2$. נקבל: $du=2rdr\Longrightarrow rdr=\frac{1}{2}du$, ובנוסף הגבולות ישתנו כך:

$$r=0\Longrightarrow u=0,\ \ r=R\Longrightarrow u=R^2$$

ונקבל:

$$=\pi\int\limits_0^{R^2} f\left(u\right)du$$

כעת, מכיוון שמתקיים: $f=F'$, לפי המשפט היסודי של החדו"א (או ניוטון־לייבניץ או סתם בלי לנמק כי זה פשוט) נקבל:

$$=\pi\cdot F\left(u\right)\Big|_{u=0}^{u=R^2}=\pi\cdot\left(F\left(R^2\right)-F\left(0\right)\right)$$

כנדרש.

ב. אם נסמן $f\left(u\right)=\cos u$, נקבל שאנו צריכים לחשב את $\iint_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy$. הפונקציה גזירה ברציפות מלאנתלפים פעמים איפה שבא לכם, ולכן מהסעיף הקודם נקבל:

$$\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy=\pi\cdot\left(F\left(R^2\right)-F\left(0\right)\right)$$

כאשר $F=\int f$. אצלנו, $f\left(u\right)=\cos u$ ולכן $F\left(u\right)=\sin u$, ונקבל:

$$\iint\limits_D \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy=\pi\cdot\left(\sin\left(R^2\right)-\sin\left(0\right)\right)=\pi\sin\left(R^2\right)$$

ג. הפעם נסמן $f\left(u\right)=e^{-u}$ ושוב נקבל שעלינו לחשב את $\iint_D f\left(x^2+y^2\right)dxdy$. כאן, $F\left(u\right)=-e^{-u}$ ולכן:

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\pi\cdot\left(-e^{-R^2}+e^{-0}\right)=\pi\left(-e^{-R^2}+1\right)$$

5. א. סווגו נקודות קריטיות של $f(x,y)=x^2+y^3+xy$.
ב. בדקו דיפרנציאביליות של:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\left(x^2+y\right)^2}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

א. נשווה את הגרדיאנט ל-0:

$$\begin{cases} f_x=2x+y=0\\ f_y=3y^2+x=0\end{cases}$$

מהמשוואה השנייה נקבל $x=-3y^2$, נציב בראשונה ונקבל:

$$-6y^2+y=0$$

כלומר $y(1-6y)=0$ ונקבל שתי נקודות $y=0,\frac{1}{6}$ וביחד עם ערכי ה$-x$: $\left(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right),(0,0)$.
כדי לסווג את הנקודות, אנו צריכים את ההסיאן. לכן, נחשב את הנגזרות השניות:

$$f_{xx}=2,\ f_{xy}=1,\ f_{yy}=6y$$

כלומר:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 6y\end{pmatrix}$$

עבור $(0,0)$:

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

המינור הראשון הוא חיובי והשני הוא שלילי ולכן זו נקודת אוכף.
עבור $\left(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right)$:

$$H_f\left(-\frac{1}{12},\frac{1}{6}\right)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

שני המינורים חיוביים ולכן זו נקודת מינימום.

ב. ראשית, בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$ הפונקציה גזירה ברציפות כמה שתרצו ולכן דיפרנציאבילית.

בנקודה $(0,0)$, אם נלך במסלול $x=0$ נקבל:

$$\lim_{y\longrightarrow 0} f(0,y)=\lim_{y\longrightarrow 0}\frac{\left(0^2+y\right)^2}{0^4+y^2}=1\neq 0=f(0,0)$$

הערך בנקודה שונה מהגבול (שאולי בכלל לא קיים) ולכן הפונקציה לא רציפה ב– $(0,0)$.
אם הפונקציה לא רציפה ולכן היא לא דיפרנציאבילית בנקודה.

6. א. נתון כי הנגזרות מסדר ראשון של f קיימות וחיוביות במישור וגם $f(0,0)>0$.
הוכיחו כי בכל הרביע הראשון הפונקציה חיובית.

ב. מצאו נקודה על המשטח $xy^2z=-1$ שבה המישור המשיק מקביל למישור $x-y-z=7$.

<u>פתרון:</u>

א. שימו לב שאנו לא יודעים האם הפונקציה דיפרנציאבילית.

תהי (x_0,y_0) נקודה ברביע הראשון. נוכיח שאכן $0<f(x_0,y_0)$.

אנו יודעים שהנגזרות החלקיות חיוביות, ובפרט אם קובעים $y=0$, נקבל שהפונקציה $f(x,0)$ עולה, כי זו פונקציה של משתנה אחד שהנגזרת שלה חיובית. מכיוון ש: $0\leq x_0$, נקבל:

$$f(0,0)\leq f(x_0,0)$$

כעת, אם נקבע $x=x_0$, שוב נקבל שהפונקציה $f(x_0,y)$ עולה, כי זו פונקציה של משתנה אחד שהנגזרת שלה חיובית. מכיוון ש: $0\leq y_0$, נקבל:

$$f(x_0,0)\leq f(x_0,y_0)$$

וסה"כ $0<f(0,0)\leq f(x_0,y_0)$, כלומר $0<f(x_0,y_0)$ כנדרש.

ב. נסמן $f(x,y,z)=xy^2z+1$, והמשטח שלנו הוא $f(x,y,z)=0$. משוואת המישור המשיק למשטח בנקודה $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ היא:

$$f_x(p_0)(x-x_0)+f_y(p_0)(y-y_0)+f_z(p_0)(z-z_0)=0$$

הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x = y^2 z,\ \ f_y = 2xyz,\ \ f_z = xy^2$$

ולכן המישור המשיק הוא:

$$y_0^2 z_0 \left(x - x_0\right) + 2x_0 y_0 z_0 \left(y - y_0\right) + x_0 y_0^2 \left(z - z_0\right) = 0$$

כעת, כדי שהמישורים יהיו מקבילים, נדרוש שהנורמלים שלהם מקבילים.
הנורמל למישור $Ax + By + Cz + D = 0$ הוא (A, B, C). אצלנו, הנורמלים הם:

$$\left(y_0^2 z_0, 2x_0 y_0 z_0, x_0 y_0^2\right),\ \ (1, -1, -1)$$

אם הם מקבילים (תלויים ליניארית), אחד הוא כפולה של השני, כלומר:

$$\left(y_0^2 z_0, 2x_0 y_0 z_0, x_0 y_0^2\right) = t\left(1, -1, -1\right)$$

נקבל שלוש משוואות:

$$\begin{cases} y_0^2 z_0 = t \\ 2x_0 y_0 z_0 = -t \\ x_0 y_0^2 = -t \end{cases}$$

מכיוון שהנקודה p_0 נמצאת על המשטח, $x_0 y_0^2 z_0 + 1 = 0$ ובפרט $x_0, y_0, z_0 \neq 0$, ולכן אפשר לחלק בהם אם צריך.
מהמשוואה השנייה והשלישית נקבל: $2x_0 y_0 z_0 = x_0 y_0^2$, כלומר $2z_0 = y_0$.
מהמשוואה השנייה והראשונה נקבל: $y_0^2 z_0 = -2x_0 y_0 z_0$, כלומר $-2x_0 = y_0$.
לכן, הנקודה היא $p_0 = (x_0, -2x_0, -x_0)$. נציב במשוואת המשטח ונקבל:

$$x_0 \cdot \left(-2x_0\right)^2 \cdot \left(-x_0\right) + 1 = 0$$

כלומר $4x_0^4 = 1$, ולכן $x_0 = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, וזה נותן לנו שתי נקודות מתאימות.