פתרון תרגיל 12 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

7 ביוני 2016

1. נסמן: $X_u = a = c, X_v = b = d$, נקבל:

$$\langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle = \langle X_u, X_u \rangle \langle X_v, X_v \rangle - \langle X_u, X_v \rangle \langle X_v, X_u \rangle$$

כלומר:

$$\left\| X_u \times X_v \right\|^2 = g_{11}g_{22} = -g_{12}g_{21} = \det\left(g\right)_{ij}$$

ואכן:

$$\left\| X_u \times X_v \right\| = \sqrt{\det\left(g\right)_{ij}}$$

2. נשתמש בנוסחה:

$$\iint\limits_{M} dS = \iint\limits_{U} \sqrt{\det G} dudv$$

(א) פרמטריזציה של הטורוס היא:

$$r\left(\theta, \phi\right) = \left(\left(a\cos\phi + b\right)\cos\theta, \left(a\cos\phi + b\right)\sin\theta, a\sin\phi\right)$$

כאשר $\left(\theta, \phi\right) \in \left[0, 2\pi\right] \times \left[0, 2\pi\right]$ (מסובבים מעגל סיבוב שלם).
זהו משטח סיבוב, והמטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} \left(a\cos\phi + b\right)^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

ולכן אלמנט השטח הוא: $\sqrt{\det G} = a\left(a\cos\phi + b\right)$.
לכן:

$$S = \iint\limits_{T^2} dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} a\left(a\cos\phi + b\right) d\phi d\theta = 2\pi a \cdot \left(a\int\limits_0^{2\pi}\cos\phi d\phi + b\int\limits_0^{2\pi} d\phi\right) =$$

$$2\pi a \cdot \left(a \cdot \sin\phi|_0^{2\pi} + 2\pi b\right) = 4\pi^2 b$$

(ב) פרמטריזציה של החרוט היא:

$$r\left(\theta,\phi\right) = \left(\phi\cos\theta, \phi\sin\theta, \phi\right)$$

כאשר $(\theta,\phi) \in [0,2\pi]\times[0,1]$.
זהו משטח סיבוב, המטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$S = \iint\limits_M dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{1} \sqrt{2\phi^2} d\phi d\theta = 2\sqrt{2}\pi \cdot \int\limits_0^{1} \phi d\phi = 2\sqrt{2}\pi \cdot \left.\frac{\phi^2}{2}\right|_{\phi=0}^{\phi=1} = \sqrt{2}\pi$$

(ג) המטריקה היא:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$S = \iint\limits_M dS = \int\limits_0^{1}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1+u^2} dv du = 2\pi\int\limits_0^1 \sqrt{1+u^2} du =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\right)\Bigg|_{u=0}^{u=1} = \pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$$

3. נרצה להשתמש במשפט גאוס־בונה (אחיינו של אבא־בונה, שבשעת סיפור מוצא מקום מיוחד).

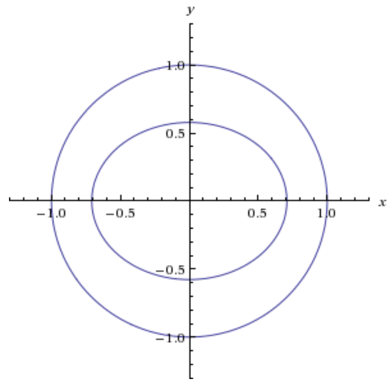
איך נראה המשטח שלנו? נעביר אגף ונוציא שורש:

$$z = \pm\sqrt{-\left(x^2+y^2-1\right)\left(2x^2+3y^2-1\right)}$$

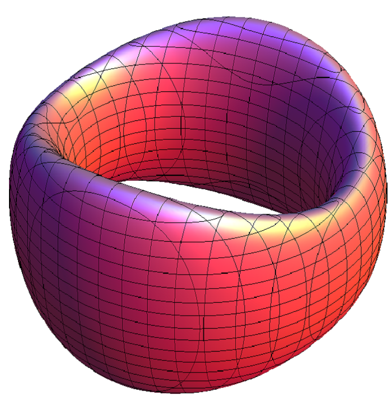
שימו לב שהמשטח סימטרי ביחס למישור xy.

אנו רוצים שהביטוי בתוך השורש יהיה כמובן אי־שלילי, כלומר שאחד מהביטויים במכפלה יהיה חיובי והשני שלילי.

אם נצייר את הגרפים של x^2+y^2-1 (מעגל) ושל $2x^2+3y^2-1$ (אליפסה) נקבל אליפסה שנמצאת בתוך מעגל:



והתחום שלנו הוא בין המעגל והאליפסה. לכן, המשטח שלנו הוא מין טורוס עקום:



למשטח יש "חור" אחד, ולכן הגנוס שלו הוא: $g=1$. אם כך, לפי משפט גאוס־בונה:

$$\iint\limits_M K d\sigma = 2\pi\left(2-2g\right)=0$$

4. נזכור שבהינתן שני מרחבים מטריים, $(X,d_X),(Y,d_Y)$, פונקציה $f:X\to Y$

נקראת איזומטריה אם לכל $u, v \in X$:

$$d_X(u,v) = d_Y(f(u), f(v))$$

(א) לא בהכרח. נסתכל, למשל, על: $f(x) = g(x) = x$.
ברור שאלו איזומטריות, ומתקיים: $h(x) = 2x$, שאינה איזומטריה, למשל:

$$1 = d(0, e_1) \neq d(h(0), h(e_1)) = d(0, 2e_1) = 2$$

(ב) לא. נשתמש באותן פונקציות מהסעיף הקודם. נקבל:

$$h = f \times g = f \times f = 0$$

$f \times f$ היא דטרמיננטה עם שתי שורות זהות ולכן מתאפסת.
פונקציית האפס היא כמובן לא איזומטריה.

(ג) כן. נראה זאת:

$$d(h(u), h(v)) = d(f(g(u)), f(g(v))) = d(g(u), g(v)) = d(u,v)$$

המעבר השני נובע מכך ש-f איזומטריה, והמעבר האחרון נובע מכך ש-g איזומטריה.

(ד) נבדוק:

$$d(h(u), h(v)) = d(cf(u), cf(v)) = |c| \cdot d(u,v)$$

ולכן h איזומטריה אם ורק אם $|c| = 1$.

5. נפריך את הטענה.
נתבונן בשני המשטחים:

$$M_1 = r\left(u,v\right) = \left(u\cos v, u\sin v, v\right)$$

$$M_2 = r\left(u,v\right) = \left(u\cos v, u\sin v, \ln u\right)$$

M_1 הוא הליקואיד ו-M_2 הוא משטח הסיבוב של העקומה $z = \ln x$.
אפשר להסתכל בפשטות, ולראות שאין החלפת קואורדינטות באחד מהמשטחים כך שנקבל את אותן המטריקות (כי שתי הקואורדינטות של הפרמטריזציות זהות אך השלישית שונה).

אפשר גם למצוא עקומה מישורית שלעקומות המרחביות המתאימו לה על המשטחים יש אורכים שונים.

חישבנו בעבר את עקמומיות גאוס של ההליקואיד; התבניות היסודיות הן:

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \\ -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$K=\frac{\det B}{\det G}=-\frac{1}{\left(1+u^2\right)^2}$$

נחשב את עקמומיות גאוס של M_2.

וקטורי הנגזרות הם:

$$r_u=\left(\cos v, \sin v, \frac{1}{u}\right), r_v=(-u\sin v, u\cos v, 0)$$

נחשב את הנורמל:

$$r_u\times r_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & \frac{1}{u} \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}=(-\cos v, -\sin v, u)$$

הנורמה היא:

$$\|r_u\times r_v\|=\sqrt{\cos^2 v+\sin^2 v+u^2}=\sqrt{u^2+1}$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{r_u\times r_v}{\|r_u\times r_v\|}=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(-\cos v, -\sin v, u)$$

וקטורי הנגזרות של הנורמל הם:

$$\vec{n}_u=\frac{1}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}(u\cos v, u\sin v, 1)=\frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot r_u+0\cdot r_v$$

$$\vec{n}_v=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(-\cos v, -\sin v, u)=0\cdot r_u-\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\cdot r_v$$

לכן:

$$W=\begin{pmatrix} \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{u\sqrt{u^2+1}} \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$K=\det W=-\frac{1}{\left(1+u^2\right)^2}$$

אם כן, עקמומיות גאוס של שני המשטחים זהה.

אף על פי כן, המשטחים אינם איזומטריים. למשל, נתבונן בעקומה:

$$\alpha\left(t\right)=\left(t,t\right)$$

כאשר $t\in\left[\frac{1}{10^{10}},2\pi\right]$, ונתבונן בעקומה $\beta=r\circ\alpha$ בכל אחד מהמקרים.
המטריקה של M_2 היא:

$$G=\left(\begin{array}{cc}1+\frac{1}{u^2} & 0\\ 0 & u^2\end{array}\right)$$

אנו יודעים שמתקיים:

$$L\left(\beta\right)=\int\limits_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi}\sqrt{\left(\alpha'\right)^tG\left(\alpha\right)\left(\alpha'\right)}dt=\int\limits_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi}\sqrt{\left(\begin{array}{cc}1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1+t^2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}1\\ 1\end{array}\right)}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi}\sqrt{2+t^2}dt\approx 22.4299$$

על ההליקואיד M_1, ועל M_2:

$$L\left(\beta\right)=\int\limits_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi}\sqrt{\left(\alpha'\right)^tG\left(\alpha\right)\left(\alpha'\right)}dt=\int\limits_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi}\sqrt{\left(\begin{array}{cc}1 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}1+\frac{1}{t^2} & 0\\ 0 & t^2\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}1\\ 1\end{array}\right)}dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{10^{10}}}^{2\pi}\sqrt{1+\frac{1}{t^2}+t^2}dt\approx 43.645$$

והאורכים בוודאי לא שווים.

*אם לוקחים $t=0$ האינטגרל השני כלל לא מתכנס.

דוגמה פשוטה יותר היא חרוט ומישור, עם אותה העקומה α.